# Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

## Epreuve de Mathématiques A MP

---

# Partie I

**1.** Pour $n$ entier naturel donné, posons $a_n = \dfrac{1}{n+1}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1/(n+2)}{1/(n+1)} = \frac{n+1}{n+2},$$

puis $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{n} = 1$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $S$ est $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

$$\boxed{\text{Le rayon de la série entière } S \text{ est égal à } 1.}$$

**2.** $f(0) + S(0) = -1 + 1 = 0$ puis pour $t \in ]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$f(t) = \frac{1}{t} \times \left(-\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1} = -S(t),$$

et donc

$$\boxed{\forall t \in ]-1,1[,\ f(t) + S(t) = 0.}$$

**3.** La fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ en tant que quotient de fonctions de classe $C^\infty$ sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$. D'autre part, la fonction $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-1,1[$ en tant que somme d'une série entière sur cet intervalle. En résumé, $f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]-1,1[$ et donc indéfiniment dérivable en chaque point de $]-\infty,1[$. Finalement,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]-\infty,1[.}$$

**4.** Soit $t \in ]-\infty,1[$. $\ln(1-t) > 0 \Leftrightarrow 1-t > 1 \Leftrightarrow t < 0$. Donc,

- si $t < 0$, $\ln(1-t) > 0$ puis $f(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t} < 0$,
- si $t = 0$, $f(t) = f(0) = -1 < 0$,
- si $t \in ]0,1[$, $\ln(1-t) < 0$ puis $f(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t} < 0$.

En résumé,

$$\boxed{\forall t \in ]-\infty,1[,\ f(t) < 0.}$$

# Partie II

**1.** La fonction $-f$ est continue sur $]-\infty,1[$. Donc la fonction $L : x \mapsto \displaystyle\int_0^x -f(t)\,dt$ est définie est de classe $C^1$ sur $]-\infty,1[$ : la fonction $L$ est la primitive de la fonction $-f$ sur $]-\infty,1[$ qui s'annule en $0$.
Puisque la fonction $-f$ est de classe $C^\infty$ sur $]-\infty,1[$ et que $L' = -f$,

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } ]-\infty,1[.}$$

**2.** La fonction $-f$ est continue sur $[0,1[$ et donc localement intégrable sur $[0,1[$. De plus, quand $t$ tend vers $1$ par valeurs inférieures, $|-f(t)| = -\dfrac{\ln(1-t)}{t} \sim -\ln(1-t)$ puis $-f(t) = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ d'après un théorème de croissances comparées. Puisque la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur un voisinage de $1$ à gauche, il en est de même de la fonction $-f$.

Ainsi, la fonction $-f$ est intégrable sur $[0,1[$ et en particulier la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x -f(t)\,dt$ a une limite réelle quand $x$ tend vers $1$ ou encore

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ se prolonge par continuité à gauche au point } 1.}$$

Dorénavant, on note encore $L$ ce prolongement. La fonction $L$ est maintenant une fonction définie et continue sur $]-\infty,1]$ ($L(1) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$).

**3.** $L$ est dérivable sur $]-\infty,1[$ et $L' = -f$. D'après la question I.4), la fonction $f$ est strictement négative sur $]-\infty,1[$ et donc la fonction $L' = -f$ est strictement positive sur $]-\infty,1[$. On en déduit que la fonction $L$ est strictement croissante sur $]-\infty,1[$ puis, $L$ étant continue en $1$,

$$\boxed{\text{la fonction } L \text{ est strictement croissante sur } ]-\infty,1].}$$

**4.** D'après la question I.2), pour $t \in ]-1,1[$, $L'(t) = -f(t) = S(t)$. Ainsi, la fonction $L'$ est développable en série entière sur $]-1,1[$. On sait alors que la fonction $L$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ (au moins et sur $[-1,1]$ au plus) et que son développement s'obtient par intégration terme à terme. Ainsi, pour $x \in ]-1,1[$,

$$L(x) = L(0) + \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}.}$$

**5.** Soit $x \in ]-1,1[$.

$$L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1+(-1)^n)\frac{x^n}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(1+(-1)^{2p}\right)\frac{x^{2p}}{(2p)^2}$$
$$= \frac{1}{2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^p}{p^2} = \frac{L(x^2)}{2}.$$

$$\boxed{\forall x \in ]-1,1[,\ L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.}$$

La fonction $L$ est continue en $-1$ et en $1$ et donc, quand $x$ tend vers $1$, on obtient $L(1) + L(-1) = \dfrac{L(1)}{2}$. Par suite, la relation précédente est encore vérifiée pour $x = 1$ (et $x = -1$).

**6.** Pour tout réel $x$ de $[0,1[$, on a $L(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| = \dfrac{x^n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$. Comme $\dfrac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série numérique convergente, on en déduit que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est normalement convergente et en particulier uniformément convergente sur $[0,1]$.

Mais alors, puisque chaque fonction $x \mapsto \dfrac{x^n}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue sur $[0,1]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ est définie et continue sur $[0,1]$. La fonction $L$ est également définie et continue en $1$ et on en déduit que

$$L(1) = \lim_{x\to 1 x<1} L(x) = \lim_{x\to 1 x<1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

$$\boxed{\int_0^1 -\frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.}$$

# Partie III

**1.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 (erreur d'énoncé). Alors, $n-1 \geqslant 1$ et donc $2^{n-1}$ est un entier pair.
Soit $m$ un entier naturel impair tel que $0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}-1$. Alors puisque $2^{n-1}$ est pair, $m+2^{n-1}$ est un entier impair et de plus, $2^{n-1} \leqslant m+2^{n-1} \leqslant 2^{n-1}-1+2^{n-1} = 2^n-1$.
Soit alors $p$ un entier naturel impair tel que $2^{n-1} \leqslant p \leqslant 2^n-1$. Il existe un unique entier relatif $m$ tel que $m+2^{n-1}=p$ à savoir $m = p-2^{n-1}$. De plus, $m$ est impair car $p$ est impair et et $2^{n-1}$ est pair et d'autre part,
$2^{n-1}-2^{n-1} \leqslant m \leqslant 2^n-1-2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1)-1$ ou encore $0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}-1$.

Finalement, pour tout entier naturel impair $p$ tel que $2^{n-1} \leqslant p \leqslant 2^n-1$, il existe un unique entier naturel impair $m$ tel que $0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}-1$ et $m+2^{n-1}=p$.

**2.** Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. Alors $\frac{x}{2} \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right[$ et $\frac{x+\pi}{2} \in \left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right[$. Comme les trois nombres $\frac{x}{2}$, $\frac{x+\pi}{2}$ et $\pi$ ne sont pas dans $\pi\mathbb{Z}$, aucun des sinus n'est nul et donc les trois fractions sont définies. L'application considérée par l'énoncé est bien une bijection.

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{x+\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2} = \frac{4}{\sin^2 x}.$$

**3.** Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{2n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$.

• Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2 = 2^{2\times 1-1}$. L'égalité est donc vraie quand $n=1$.

• Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $2^{2n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$. En multipliant par 4 les deux membres de cette égalité et appliquant l'égalité de la question précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
2^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{4}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)/2\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}+\pi\right)/2\right)}\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1+2^{n+1})\pi}{2^{n+2}}\right)}\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\pi-\frac{(2k+1+2^{n+1})\pi}{2^{n+2}}\right)}\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2^{n+1}-2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)}\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2^{n+1}-2(2^n-l-1)-1)\pi}{2^{n+2}}\right)} \text{ (en posant } k=2^n-l-1\text{)}\\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}+\sum_{l=2^{n-1}}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2l+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} = \sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)}.
\end{aligned}$$

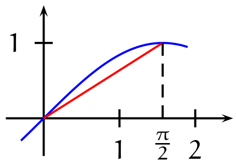
Le résultat est démontré par récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}.}$$

**4. (a)** La fonction $x \mapsto \sin x$ est concave sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ car pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin''(x) = -\sin(x) \leqslant 0$. On en déduit que la corde joignant les points $(0, \sin(0)) = (0, 0)$ et $\left(\dfrac{\pi}{2}, \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ est au-dessous du graphe de la fonction sinus sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ou encore que

$$\boxed{\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x.}$$




**(b)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, 2^{n-1} - 1]\!]$, on a

$$0 < \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} \leqslant \frac{(2(2^{n-1}-1)+1)\pi}{2^{n+1}} = \frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+1}} \leqslant \frac{2^n\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

Soit $k \in [\![0, 2^{n-1} - 1]\!]$. D'après la question précédente, $\sin\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right) \geqslant \dfrac{2}{\pi} \dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} > 0$ puis $\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right) \geqslant \dfrac{(2k+1)^2}{2^{2n}} > 0$ et enfin

$$\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leqslant \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{2^{2n}}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2/4}{(2k+1)^2}.$$

**(c)** On commence par multiplier les deux membres de l'égalité la question III.3) par $\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2$. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} = \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \times 2^{2n-1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N$ un entier naturel non nul donné. Pour tout entier naturel $n$ tel que $2^{n-1} - 1 > N$, on a

$$\frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{N} \left(\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) + \sum_{k=N+1}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

D'après la question précédente, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=N+1}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{2^{n-1}-1} \frac{C}{(2k+1)^2} \leqslant \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{C}{(2k+1)^2}$ (où $C$ est indépendant de $n$).

Comme la série de terme général $\dfrac{C}{(2k+1)^2}$ est convergente, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que si $N \geqslant N_1$, on a $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{C}{(2k+1)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour tout entier $N \geqslant N_1$ et tout entier $n$ tel que $2^{n-1} - 1 > N$, on a

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) \leqslant \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N} \left(\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (*).$$

Quand $n$ tend vers $+\infty$ à $k$ fixé, $\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \sim \dfrac{\pi^2}{2^{2n+2}} \dfrac{1}{\dfrac{(2k+1)^2\pi}{2^{2n+2}}} = \dfrac{1}{(2k+1)^2}$ ou encore $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} - \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right) = 0$. Par suite, pour $N$ fixé tel que $N \geqslant N_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} - \dfrac{1}{(2k+1)^2}\right) = 0$ (somme de suites de limite nulle en nombre constant quand $n$ varie). On fait tendre $n$ vers $+\infty$ dans $(*)$ à $N \geqslant N_1$ fixé et on obtient

$$\forall N \geqslant N_1,\ 0 \leqslant \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{(2k+1)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}^*/\ \forall N \in \mathbb{N}^*$, $\left(N \geqslant N_1 \Rightarrow 0 \leqslant \dfrac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{(2k+1)^2} < \varepsilon\right.$ et donc $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

**5.** $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{L(1)}{4} + \dfrac{\pi^2}{8}$ et donc $\dfrac{3L(1)}{4} = \dfrac{\pi^2}{8}$ puis

$$\boxed{-\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = L(1) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Ensuite, d'après la question 5II.5), $L(1) + L(-1) = \dfrac{L(1)}{2}$ et donc $L(-1) = -\dfrac{L(1)}{2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

$$\boxed{L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

**6.** Pour $x \in ]0,1[$, posons $u(x) = L(1-x) + L(x) + \ln(x)\ln(1-x)$. D'après la question II.1), la fonction $L$ est dérivable sur $]0,1[$ (et $L' = -f$) et il en est de même de la fonction $u$. De plus, pour $x \in ]0,1[$,

$$u'(x) = f(1-x) - f(x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x) = \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} = 0.$$

Donc la fonction $u$ est constante sur $]0,1[$. On en déduit que $\forall x \in ]0,1[$, $u(x) = \lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}} u(t)$. Quand $t$ tend vers $1$, $L(t)$ tend vers $L(1)$ d'après la question II.3) et $L(1-t)$ tend vers $L(0) = 0$. D'autre part,

$$\ln(t)\ln(1-t) \underset{t\to1}{\sim} (t-1)\ln(1-t) = -(1-t)\ln(1-t),$$

et donc $\lim\limits_{t\to1}\ln(t)\ln(1-t) = \lim\limits_{t\to1} -(1-t)\ln(1-t) = \lim\limits_{X\to0} -X\ln X = 0$. Finalement, $\lim\limits_{\substack{t\to1\\t<1}} u(t) = L(1)$ puis $\forall x \in ]0,1[$, $u(x) = L(1)$ ou encore

$$\boxed{\forall x \in ]0,1[,\ L(1-x) = L(1) - \ln(x)\ln(1-x) - L(x).}$$

**7.** Quand $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient $L\left(\dfrac{1}{2}\right) = L(1) - \left(\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)^2 - L\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{6} - \ln^2 2 - L\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc

$$\boxed{L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}.}$$

**8.** La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0,\ln 2]$. De plus, quand $t$ tend vers $0$, $\dfrac{t}{1-e^{-t}} \sim \dfrac{t}{-(-t)} = 1$. Donc la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ se prolonge par continuité en $0$ et est en particulier intégrable sur un voisinage de $0$ à droite. Finalement, la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{1-e^{-t}}$ est intégrable sur $]0,\ln 2]$. On pose alors $t = -\ln(1-x)$ ou encore $x = 1-e^{-t}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \frac{t}{1-e^{-t}}\,dt &= \int_0^{1/2} -\frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}\,dx = -\int_0^{1/2}\left(\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{1-x}\right)dx \\ &= -\int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx - \int_0^{1/2}\frac{\ln(1-x)}{1-x}\,dx \text{ (toutes les intégrales existent)} \\ &= L\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[\ln^2(1-x)\right]_0^{1/2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2} + \frac{\ln^2 2}{2} = \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{\ln 2} \frac{t}{1-e^{-t}}\,dt = \frac{\pi^2}{12}.}$$

## Partie IV

**1.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est continue et négative sur $]-\infty,0[$. De plus, quand $t$ tend vers $-\infty$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est prépondérante devant la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $]-\infty,0[$. Puisque cette fonction est négative sur $]-\infty,0[$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = -\infty$ ou encore

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} L(x) = -\infty.}$$

**2.** La fonction $h_1$ est continue et strictement croissante sur $]0,1[$. La fonction $h_1$ réalise donc une bijection de $]0,1[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to 0^+} h_1(x), \lim\limits_{x\to 1^-} h_1(x)\right[ = ]-\infty,0[$. Ainsi,

$$\boxed{h\,(]0,1[) = ]-\infty,0[.}$$

**3.** Quand $x$ décrit $]0,1[$, $1-x$ décrit $[0,1[$ et $1-\dfrac{1}{x}$ décrit $]-\infty,0[$. Puisque $L$ est dérivable sur $]-\infty,1[$, il en est de même de la fonction $h_2$. De plus, pour $x \in ]0,1[$,

$$\begin{aligned}h_2'(x) &= -L'(1-x) + \frac{1}{x^2}L'\left(1-\frac{1}{x}\right) = f(1-x) - \frac{1}{x^2}f\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{1}{x^2}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{\ln(x)}{x-1} + \frac{\ln(x)}{x(x-1)} \\ &= -\frac{\ln(x)}{x-1} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x-1} = -\frac{\ln(x)}{x} = \left(-\frac{1}{2}\ln^2(x)\right)'.\end{aligned}$$

Par suite, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in ]0,1[$, $h_2(x) = -\dfrac{1}{2}\ln^2(x) + K$. Quand $x$ tend vers $1$, on obtient $K = L(0) + L(0) = 0$ et donc

$$\boxed{\forall x \in ]0,1[,\ L(1-x) + L\left(1-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(x).}$$

**4.** Puisque $h_1$ est une bijection de $]0,1[$ sur $]-\infty,0[$, l'égalité précédente équivaut à l'égalité

$$\forall y \in ]-\infty,0[,\ L(1-h_1^{-1}(y)) + L\left(1-\frac{1}{h_1^{-1}(y)}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(h_1^{-1}(y)).$$

Ensuite, pour $x \in ]0,1[$ et $y \in ]-\infty, 0[$, $h_1(x) = y \Leftrightarrow y = 1 - \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-y}$ et on a donc

$$\forall y \in ]-\infty, 0[,\ L\left(1 - \frac{1}{1-y}\right) + L(y) = -\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{1-y}\right),$$

ou encore

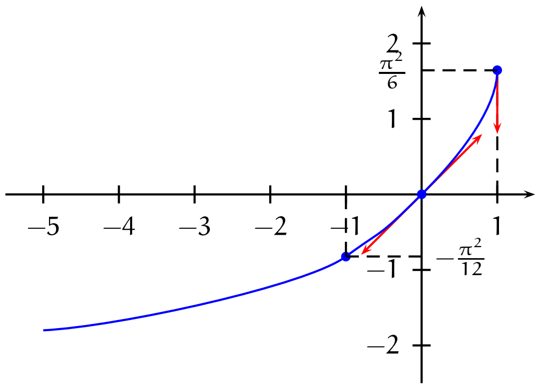
$$\forall y \in ]-\infty, 0[,\ \frac{1}{y}L\left(\frac{y}{y-1}\right) + \frac{1}{y}L(y) = -\frac{1}{2y}\ln^2(1-y) \quad (*).$$

Quand $y$ tend vers $-\infty$, $L\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$ tend vers $L(1)$ et donc $\dfrac{1}{y}L\left(\dfrac{y}{y-1}\right)$ tend vers $0$. D'autre part, $-\dfrac{1}{2y}\ln^2(1-y) \sim -\dfrac{\ln^2(-y)}{2y}$ tend vers $0$ d'après un théorème de croissances comparées. Quand $y$ tend vers $-\infty$ dans $(*)$, on obtient

$$\boxed{\lim_{y \to -\infty} \frac{L(y)}{y} = 0.}$$

**5.** La courbe représentative de la fonction $L$ admet donc en $-\infty$ une branche parabolique de direction $(Ox)$.

**6. Allure du graphe de la fonction $L$.**




$$-\frac{1}{t(1-t)} - \frac{\ln(1-t)}{t^2}$$

# Partie V

**1.** On note $(\mathcal{E}_{h,J})$ l'équation homogène associée à $(\mathcal{E}_J)$.
Sur l'intervalle $J$, l'équation $\mathcal{E}_{h,J}$ (resp. $(\mathcal{E}_J)$ s'écrit $y' + \dfrac{1}{x}y = 0$ (resp. $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x(1-x)}$). Les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$ sont continues sur $J$. On sait alors que les solutions de $\mathcal{E}_{h,J}$ (resp. $(\mathcal{E}_J)$ sur $J$ constituent un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $1$ (resp. un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension $1$ et de direction l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{E}_{h,J})$ sur $J$.
Soit $g$ une fonction dérivable sur $J$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (\mathcal{E}_{h,J}) \text{ sur } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (1-x)xg'(x) + (1-x)g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ xg'(x) + f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (xg)'(x) = 0 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}/\ \forall x \in J,\ xg(x) = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in J,\ g(x) = \frac{\lambda}{x}. \end{aligned}$$

Les solutions de $(\mathcal{E}_{h,J})$ sur $J$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$, $K \in \mathbb{R}$.

**2.** Déterminons alors une solution particulière de $(\mathcal{E}_J)$ sur $J$ par la méthode de variation de la constante. Il existe une solution particulière de $(\mathcal{E}_J)$ sur $J$ de la forme $g\ :\ x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ où $\lambda$ est une fonction dérivable sur $I$.

$$\begin{aligned} g \text{ solution de } (\mathcal{E}_J) \text{ sur } J &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (1-x)x\left(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}\right) + (1-x)\frac{\lambda(x)}{x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in J,\ (1-x)\lambda'(x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in J,\ \lambda'(x) = \frac{1}{1-x} \\ &\Leftarrow \forall x \in J,\ \lambda(x) = -\ln(1-x). \end{aligned}$$

Une solution particulière de $(\mathcal{E}_J)$ sur $J$ est donc la fonction $x \mapsto -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ et finalement

$$\boxed{\text{les solutions de } (\mathcal{E}_J) \text{ sur } J \text{ sont les fonctions } x \mapsto -\frac{\ln(1-x)+\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}.}$$

**3.** Puisque les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x(1-x)}$ sont continues sur J, les solutions de $(\mathcal{F}_J$ sur J constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 2.

Soit $g$ une fonction deux fois dérivables sur J.

$$\begin{aligned}
g \text{ , solution de } (\mathcal{F}_J) \text{ sur J} &\Leftrightarrow g' \text{ , solution de } (\mathcal{E}_J) \text{ sur J} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/ \ \forall x \in J,\ g'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\lambda}{x} \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2/ \ \forall x \in J,\ g(x) = L(x) + \lambda \ln(|x|) + \mu \\
&\Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2/ \ \forall t \in J,\ g(t) = L(t) + A \ln(|t|) + B.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions de } (\mathcal{F}_J) \text{ sur } J \text{ sont les fonctions } t \mapsto L(t) + A\ln(|t|) + B,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.}$$

**4.** Soit $g$ une éventuelle solution de $(\mathcal{F}_{]-\infty,1[})$. Nécessairement, il existe $(A_1, A_2, B_1, B_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\forall x \in ]-\infty, 1[\setminus\{0\},\ g(x) = \begin{cases} L(x) + A_1\ln(|x|) + B_1 \text{ si } x < 0 \\ L(x) + A_2\ln(|x|) + B_2 \text{ si } x > 0 \end{cases}.$$

La fonction $g$ devant avoir une limite réelle quand $x$ tend vers $0$, on a nécessairement $A_1 = A_2 = 0$ (par continuité de $L$ en $0$) puis $B_1 = B_2$. Par suite, il existe nécessairement un réel $B$ tel que $\forall x \in ]-\infty, 1[\setminus\{0\}$, $g(x) = L(x) + B$ puis par continuité de $g$ (et de L) en $0$, on a nécessairement $\forall x \in ]-\infty, 1[$, $g(x) = L(x) + B$.
Réciproquement, pour tout $B$ réel, la fonction $g : x \mapsto L(x) + B$ est deux fois dérivable sur $]-\infty, 1[$ (d'après la question II.1)), solution de $(\mathcal{F})$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, 1[$ et vérifie encore $(\mathcal{F})$ quand $x = 0$ car $0g''(0) + g'(0) = L'(0) = -f(0) = 1$.

Les solutions de $(\mathcal{F}_{]-\infty,1[})$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto L(x) + B$, $B \in \mathbb{R}$. Elles constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension $1$.