

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques B MP

Exercice I

Si $\chi_A = P_A$, χ_A est unitaire et on suppose donc que $\chi_A = \det(XI_3 - A)$ et non pas $\det(A - XI_3)$.

1) a) $\chi_A = P_A = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ est à racines simples dans \mathbb{C} . On sait alors que A est diagonalisable et que les sous-espaces propres de A sont des droites vectorielles.

b) On désigne par f (resp. g) l'endomorphisme de \mathbb{C}^3 canoniquement associé à A (resp. B).

Soit (e_1, e_2, e_3) une base (de \mathbb{C}^3) de vecteurs propres de f associée à la famille de valeurs propres (α, β, γ) (Donc $f(e_1) = \alpha e_1 \dots$).

Puisque A et B commutent, il en est de même de f et g et on sait que les sous-espaces propres de f sont stables par g . Puisque les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles, pour $1 \leq i \leq 3$, on a $g(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$ ou encore (e_1, e_2, e_3) sont des vecteurs propres de g .

Ainsi, (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{C}^3 constituée de vecteurs propres de g et donc g est diagonalisable ou encore B est diagonalisable.

c) Soit $T = a \frac{(X - \beta)(X - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + b \frac{(X - \alpha)(X - \gamma)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + c \frac{(X - \alpha)(X - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$.

T est un élément de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $T(\alpha) = a$, $T(\beta) = b$ et $T(\gamma) = c$.

d) Avec les notations de la question b), si on pose $T = \sum a_k X^k$ et si a , b et c sont les valeurs propres de g respectivement associées à e_1 , e_2 et e_3 , on a

$$(T(f))(e_1) = \sum a_k f^k(e_1) = \left(\sum a_k \alpha^k \right) e_1 = T(\alpha) e_1 = a e_1 = g(e_1),$$

et de même, $(T(f))(e_2) = b e_2 = g(e_2)$ et $(T(f))(e_3) = c e_3 = g(e_3)$. Ainsi, les endomorphismes $T(f)$ et g coïncident sur une base de \mathbb{C}^3 et donc $T(f) = g$ ou encore $T(A) = B$.

e) La question précédente montre que toute matrice commutant avec A est un polynôme en A . Réciproquement, tout polynôme en A commute avec A et donc

$$C(A) = \mathbb{C}[A].$$

Remarque. Les polynômes T fournis à la question c) sont de degrés au plus 2. Donc $C(A) \subset \mathbb{C}_2[A] = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$. Plus précisément

$$\text{Vect}(I_3, A, A^2) \subset \mathbb{C}[A] = C(A) \subset \text{Vect}(I_3, A, A^2),$$

et donc

$$C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2).$$

On peut montrer que (I, A, A^2) est une base de $C(A)$.

2) a) On note P_f le polynôme minimal de f . $g^3 = (f - \lambda \text{Id})^3 = P_f(f) = 0$.

Le polynôme $(X - \lambda)^2$ est un polynôme non nul de degré strictement plus petit que le degré de P_f . Par définition de P_f , $(X - \lambda)^2$ n'est pas annulateur de f ou encore $g^2 = (f - \lambda \text{Id})^2 \neq 0$.

$$g \text{ est nilpotent d'indice 3.}$$

b) Soit u un vecteur de E tel que $g^2(u) \neq 0$. Montrons que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ est libre.

Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\lambda u + \mu g(u) + \nu g^2(u) = 0$. En prenant l'image des deux membres par g^2 , on obtient $\lambda g^2(u) = 0$ (car $g^3(u) = g^4(u) = 0$) et donc $\lambda = 0$ (car $g^2(u) \neq 0$).

Il reste $\mu g(u) + \nu g^2(u) = 0$. En prenant les images par g des deux membres, on obtient $\mu g^2(u) = 0$ puis $\mu = 0$. Il reste alors $\nu g^2(u) = 0$ et donc $\nu = 0$.

Ainsi, $\forall(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$, $(\lambda u + \mu g(u) + \nu g^2(u) = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$ et donc la famille $(u, g(u), g^2(u))$ est libre. Puisque $\text{card}(u, g(u), g^2(u)) = 3 = \dim(\mathbb{C}^3) < +\infty$, la famille $(u, g(u), g^2(u))$ est une base de \mathbb{C}^3 .

c) Puisque h commute avec f , h commute avec $g = f - \lambda \text{Id}$. Donc

$$h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u) \text{ et } h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u).$$

$$\text{Par suite, } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

d) Notons matrice H' (resp. A', B') la matrice de h (resp. f, g) dans la base \mathcal{B} .

$$\text{On a } B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis}$$

$$\begin{aligned} H' &= x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = x_3 B'^2 + x_2 B' + x_1 I_3 \\ &= x_3 (A' - \lambda I_3)^2 + x_2 (A' - \lambda I_3) + x_1 I_3. \end{aligned}$$

Si maintenant P est la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^3 à la base \mathcal{B} , on a

$$H = PH'P^{-1} = P(x_3(A' - \lambda I_3)^2 + x_2(A' - \lambda I_3) + x_1 I_3)P^{-1} = x_3(A - \lambda I_3)^2 + x_2(A - \lambda I_3) + x_1 I_3.$$

La matrice H est donc un polynôme en A .

e) Réciproquement, tout polynôme en A commute avec A et donc encore une fois

$$\boxed{C(A) = \mathbb{C}[A].}$$

(Comme en 1), on a plus précisément $C(A) = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.

3) a) Les polynômes $X - \lambda_1$ et $(X - \lambda_2)^2$ sont premiers entre eux car ces polynômes n'ont pas de racine commune. Puisque le polynôme $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$ est annulateur de f , le théorème de décomposition des noyaux permet d'écrire

$$\boxed{\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2.}$$

b) Puisque $\chi_A = P_A$, f admet λ_1 pour valeur propre simple et λ_2 pour valeur propre double. Puisque λ_1 est valeur propre simple, $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$ est une droite vectorielle et puisque $\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$, $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$ est un plan vectoriel.

Soient e_1 et e_2 des vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . e_2 est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$ et on peut donc compléter la famille libre (e_2) en une base (e_2, e_3) du plan $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$. Ainsi (e_1) est une base de la droite $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id})$, (e_2, e_3) du plan $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$ et puisque $\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$, $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{C}^3 .

On a $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$. D'autre part, on sait que le sous-espace caractéristique $\text{Ker}(f - \lambda_2 \text{Id})^2$ est stable par f . On en déduit que $f(e_3) \in \text{Vect}(e_2, e_3)$. Comme $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2$, la matrice de f dans la base \mathcal{B}' est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \alpha \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, la matrice de f dans \mathcal{B}' est de la forme désirée avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha E_{2,3}$ (de sorte que $N^2 = 0$).

c) α Posons $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Un calcul par blocs fournit

$$MA' = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \lambda_1 & \lambda_2 L + LN \\ \lambda_1 C & \lambda_2 V + VN \end{pmatrix},$$

et

$$A'M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_2 + N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \lambda_1 & \lambda_1 L \\ \lambda_2 C + NC & \lambda_2 V + NV \end{pmatrix},$$

Par suite,

$$MA' = A'M \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 L + LN = \lambda_1 L \\ \lambda_1 C = \lambda_2 C + NC \\ \lambda_2 V + VN = \lambda_2 V + NV \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} {}^t N {}^t L = (\lambda_1 - \lambda_2) {}^t L \\ NC = (\lambda_1 - \lambda_2) C \\ VN = NV \end{cases}$$

Maintenant, la matrice N est nilpotente et admet donc 0 pour unique valeur propre. Puisque $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2$ n'est pas valeur propre de N . Par suite, l'égalité $NC = (\lambda_1 - \lambda_2)C$ équivaut à $C = 0$.

Puisque N et ${}^t N$ ont même polynôme caractéristique, la matrice ${}^t N$ admet aussi 0 pour unique valeur propre et donc l'égalité ${}^t N {}^t L = (\lambda_1 - \lambda_2) {}^t L$ équivaut à $L = 0$. En résumé,

$$MA' = A'M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$$

β) La démarche est analogue à celle des questions 2)a), 2)b) et 2)c) : **1**) f désigne l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 de matrice U dans la base canonique de \mathbb{C}^2 **2**) l'endomorphisme $g = f - \lambda_2 \text{Id}$ est nilpotent d'indice 2 **3**) il existe un vecteur u de \mathbb{C}^2 tel que la famille $(u, g(u))$ soit une famille libre de \mathbb{C}^2 **4**) ... **5**) il existe un polynôme R (de degré au plus 1) tel que $R(U) = V$.

γ) $(X - \lambda_2)^2$ divise $S - R \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X] / S = R + Q(X - \lambda_2)^2$.
Soit alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ puis $S = R + Q(X - \lambda_2)^2$.

$$X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \Leftrightarrow S(\lambda_1) = \mu \Leftrightarrow R(\lambda_1) + Q(\lambda_1)(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \mu \Leftrightarrow Q(\lambda_1) = \frac{\mu - R(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}.$$

Le polynôme constant $Q = \frac{\mu - R(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}$ est donc un polynôme tel que $X - \lambda_1$ divise $S - \mu \Leftrightarrow S(\lambda_1)$ et le polynôme $S = R + Q(X - \lambda_2)^2$ est un polynôme vérifiant les conditions de l'énoncé.

δ) On reprend le polynôme S précédent. Un calcul par blocs fournit $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$. Déjà, puisque $X - \lambda_1$ divise $S - \mu$, on a $S(\lambda_1) = \mu$.

Ensuite, $S(U) = R(U) + Q \times (U - \lambda_2 I_2)^2 = R(U) + Q \times N^2 = R(U) = V$ et donc

$$S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = M.$$

d) A la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{C}^3 et on note $A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . Soit H une matrice commutant avec A puis h l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 de matrice H dans la base canonique.

La matrice de h dans la base \mathcal{B}' est une matrice M du type étudié en c). Il existe un polynôme S tel que $M = S(A')$. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base \mathcal{B}' . L'égalité $PMP^{-1} = PS(A')P^{-1} = S(PA'P^{-1})$ s'écrit $H = S(A)$ et donc H est un polynôme en A . Réciproquement, un polynôme en A commute avec A et donc

$$\boxed{C(A) = C[A].}$$

Exercice II

1) Soit $x \in]0, 2\pi[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0, +\infty[$ ($\forall t \geq 0, \forall x \in]0, 2\pi[, \text{ch}(t^2) - \cos(x) > 1 - 1 = 0$).

De plus, quand t tend vers $+\infty$, $\frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)} \sim 2e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, la fonction I est bien définie sur $]0, 2\pi[$.

a) Pour tout réel $x \in]0, 2\pi[, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t^2) - 1} dt = I$. Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - 1}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t^2) - 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ou encore $I \in \mathbb{R}$.

Comme pour tout réel x de $]0, 2\pi[, 0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)} dt \leq I$, la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{1}{\text{ch}(t^2) - \cos(x)} dt$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

b) Quand t tend vers 0 ,

$$\left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right| = \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \left(1 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{24} + o(t^8)\right)}{\frac{t^4}{2} \left(\frac{t^4}{2} + o(t^4)\right)} \right| = \frac{1}{6} + o(1).$$

Donc la fonction $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ a une limite réelle quand t tend vers 0 ou encore la fonction $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ se prolonge par continuité en 0.

c) Soit $x \in]0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{(\operatorname{ch}(t^2) - \cos x) \left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos x\right)} dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \frac{\left| \frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2) \right|}{(\operatorname{ch}(t^2) - \cos x) \left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos x\right)} dt \leq \int_0^1 \frac{\left| \frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2) \right|}{(\operatorname{ch}(t^2) - 1) \left(1 + \frac{t^4}{2} - 1\right)} dt \\ &= \int_0^1 \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right| dt = J. \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ est continue sur $]0, 1]$ et est prolongeable par continuité en 0. On en déduit que

la fonction $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} - 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ est intégrable sur $]0, 1]$ ou encore que $J \in \mathbb{R}$. Comme pour tout réel x de $]0, 2\pi[$,

$\left| \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x} \right| \leq J$, on a montré que la fonction $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

d) Soit $x \in]0, 2\pi[$. On pose $u = \frac{t}{(2(1 - \cos x))^{1/4}}$. On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x} dt &= \int_0^{(2(1 - \cos x))^{-1/4}} \frac{1}{1 + u^4(1 - \cos x) - \cos x} (2(1 - \cos x))^{1/4} du \\ &= 2^{1/4} (1 - \cos x)^{-3/4} \int_0^{(2(1 - \cos x))^{-1/4}} \frac{du}{1 + u^4}. \end{aligned}$$

Quand x tend vers 0, $(2(1 - \cos x))^{-1/4}$ tend vers $+\infty$ et donc $\int_0^{(2(1 - \cos x))^{-1/4}} \frac{du}{1 + u^4}$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

D'autre part, $2^{1/4} (1 - \cos x)^{-3/4} \sim 2^{1/4} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{-3/4} = 2x^{-3/2}$ et donc

$$2^{1/4} (1 - \cos x)^{-3/4} \int_0^{(2(1 - \cos x))^{-1/4}} \frac{du}{1 + u^4} \sim 2x^{-3/2} \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2}.$$

Maintenant, d'après les questions 1)a) et 1) c),

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x} = \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos x} + O(1) + O(1) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2} + o\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2}\right) + O(1) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2} + o\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$I(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $u = nt$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/n}} du/n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt.$$

3) a) Soient $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Si $(x, t) = (0, 0)$, $\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx) = 0$ et si $(x, t) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx) &= \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^N e^{(-t+ix)n} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{(-t+ix)} \frac{1 - e^{(-t+ix)N}}{1 - e^{-t+ix}} \right) \quad ((x, t) \neq (0, 0) \Rightarrow e^{-t+ix} \neq 1) \\ &= e^{-t} \operatorname{Im} \left(e^{ix} \frac{(1 - e^{(-t+ix)N})(1 - e^{-t-ix})}{(1 - e^{-t+ix})(1 - e^{-t-ix})} \right) = e^{-t} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{ix} - e^{-t} - e^{-Nt+i(N+1)x} + e^{-(N+1)t+iNx}}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} \right) \\ &= e^{-t} \frac{\sin(x) - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{1 - 2e^{-t} \cos x + e^{-2t}} = \frac{\sin(x) - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{e^t - 2 \cos x + e^{-t}} \\ &= \frac{\sin(x) - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\operatorname{ch} t - \cos x)}. \end{aligned}$$

b) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$. D'après les questions 2) et 3)a),

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=1}^N \sin(nx) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx)}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin(Nx)}{2(\operatorname{ch} t - \cos x) \sqrt{t}} dt. \end{aligned}$$

Maintenant, on rappelle que la fonction $u \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(u^2) - \cos(x)}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(u^2) - \cos(x)} du$.

L'application $t \mapsto \sqrt{t}$ est un C^1 -difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même et en posant $u = \sqrt{t}$, on obtient

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(u^2) - \cos(x)} du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(\operatorname{ch}(t) - \cos(x)) \sqrt{t}} dt.$$

Donc, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{2(\operatorname{ch} t - \cos x) \sqrt{t}} dt$ est une intégrale convergente et on peut écrire

$$\begin{aligned} \left| S_N(x) - \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} I(x) \right| &= \left| S_N(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{2(\operatorname{ch} t - \cos x) \sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt} + e^{-(N+1)t}}{2(\operatorname{ch} t - \cos x) \sqrt{t}} dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt} + e^{-(N+1)t}}{2(1 - \cos x) \sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1 - \cos(x))} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt} + e^{-(N+1)t}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2(1 - \cos(x))} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right) \quad (\text{d'après la question 2}). \end{aligned}$$

Quand N tend vers $+\infty$, $\frac{1}{2(1 - \cos(x))} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right)$ tend vers 0. Donc la suite $(S_N(x))$ converge et

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{2(\operatorname{ch} t - \cos x)\sqrt{t}} dt = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(u^2) - \cos x} du.$$

4) D'après la question 1)d), $I(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \frac{\sin(x)}{\sqrt{\pi}} I(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \times \frac{\pi}{\sqrt{2}} x^{-3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Exercice III

1) La quadrique d'équation $x^2 + z^2 = 1$ est le cylindre de révolution d'axe (Oy) et de rayon 1.

2) a) Soient $\gamma \in \mathbb{R}$ puis P_γ le plan d'équation $z = \gamma$.

$$(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap P_\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 \leq 1 \\ y^2 + z^2 \leq 1 \\ z = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 - \gamma^2 \\ y^2 \leq 1 - \gamma^2 \\ z = \gamma \end{cases}$$

• Si $\gamma^2 > 1$, on a $1 - \gamma^2 < 0$ et $\mathcal{S} \cap P_\gamma = \emptyset$.

• Si $\gamma^2 \leq 1$, on a $1 - \gamma^2 \geq 0$ et $(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap P_\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \sqrt{1 - \gamma^2} \\ |y| \leq \sqrt{1 - \gamma^2} \\ z = \gamma \end{cases}$.

Dans ce cas, $\mathcal{S} \cap P_\gamma$ est le carré plein de sommet $(\sqrt{1 - \gamma^2}, \sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$, $(\sqrt{1 - \gamma^2}, -\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$, $(-\sqrt{1 - \gamma^2}, \sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$ et $(-\sqrt{1 - \gamma^2}, -\sqrt{1 - \gamma^2}, \gamma)$.

b) Notons V le volume de \mathcal{S} . En sommant par tranches, on obtient

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1} dx dy dz = \int_{z=-1}^{z=1} \left(\int_{x=-\sqrt{1-z^2}}^{x=\sqrt{1-z^2}} dx \right) \left(\int_{y=-\sqrt{1-z^2}}^{y=\sqrt{1-z^2}} dy \right) dz = \int_{-1}^1 4(1 - z^2) dz \\ &= 4 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Le volume V de \mathcal{S} est $\frac{16}{3}$.

3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists k \in [0, 1] / \begin{cases} (x, y, z) \in [0, 1]^3 \\ x^2 + z^2 = k \\ y^2 + z^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow \exists k \in [0, 1] / \begin{cases} (x, y, z) \in [0, 1]^3 \\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 2k \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \in [0, 1]^3 \\ x = y \\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 2 \end{cases}.$$

Ainsi, Σ est une partie du plan d'équation $x = y$.

On effectue alors le changement de repère orthonormé : $\begin{cases} x = \frac{X - Y}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{X + Y}{\sqrt{2}} \\ z = Z \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} X = \frac{x + y}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{-x + y}{\sqrt{2}} \\ Z = z \end{cases}$. On obtient

$$(x, y, z) \in \Sigma \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y, z) \in [0, 1]^3 \\ x = y \\ x^2 + y^2 + 2z^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}}, \frac{X + Y}{\sqrt{2}}, Z \right) \in [0, 1]^3 \\ Y = 0 \\ X^2 + Y^2 + 2Z^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 0 \\ \frac{1}{2} X^2 + Z^2 \leq 1 \\ (X, Z) \in [0, \sqrt{2}] \times [0, 1] \end{cases}.$$

Ainsi, dans le plan (XOZ), Σ est le domaine défini par $\frac{1}{2} X^2 + Z^2 \leq 1$, $X \geq 0$, $Z \geq 0$. Il s'agit du quart d'un domaine elliptique de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{2}}$. L'aire de Σ est donc $\frac{1}{4} \pi \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

L'aire de Σ est $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.