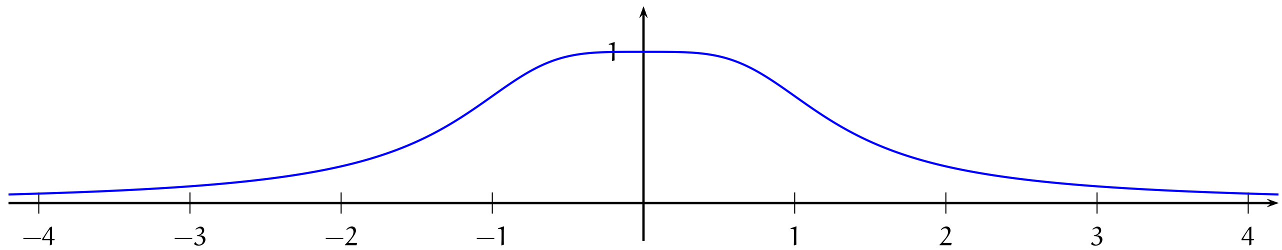
Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC

Partie I : Résultats préliminaires

1) Etude de f **a)** f est paire, définie sur $\mathbb{R}$, continue dérivable et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
Tracé de (C_f).



b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = -2x^3(1+x^4)^{-3/2}$ puis

$$f''(x) = -2(3x^2(1+x^4)^{-3/2} - 6x^6(1+x^4)^{-5/2}) = -6(1+x^4)^{-5/2}(x^2(1+x^4) - 2x^6) = -6x^2(1+x^4)^{-5/2}(1-x^4)$$

f'' s'annule en changeant de signe en $x = -1$ et $x = 1$. (C_f) admet deux points d'inflexion, les points de coordonnées $\left(-1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x^4)^{-1/2} \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^8 + o(x^8) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8) \end{aligned}$$

d) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 8, son développement de Taylor-Young à l'ordre 8 à savoir

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{8} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^8).$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on en déduit que

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = f^{(6)}(0) = f^{(7)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{2} = -12 \text{ et } f^{(8)}(0) = \frac{3 \times 8!}{8} = 15120.$$

2) Etude de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **a)** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \times \frac{n!^2}{(n+1)!^2} \times \frac{4^n}{4^{n+1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ positif ou nul.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!}\dfrac{1}{(2^2)^n} = \dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$.

d) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est égal à 1.

3) Etude d'une intégrale impropre **a)** La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

b) f est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t^4}} = \dfrac{1}{t^2} > 0$. Puisque la fonction $t \mapsto /\mathtt{dfrac1t}^2$ est intégrable sur un voisinage de $+\infty$, il en est de même de f et finalement, f est intégrable sur $[0, +\infty[$. On en déduit l'existence de α.

c) L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t} = u$ est un C^1-difféomorphisme de $[1, +\infty[$ sur $]0, 1]$. En posant $u = \dfrac{1}{t}$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{u^4}}} \times -\frac{du}{u^2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,du.$$

d) $\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = 2F(1)$.

e) i) $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^4}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n^4}} = \dfrac{1}{n^2} > 0$. Puisque la série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ converge, la série de terme général $f(n)$ converge.

ii) La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant (n+1-n)f(n) = f(n)$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \geqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \alpha.$$

De même, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \geqslant (n-(n-1))f(n) = f(n)$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = 1 + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1 + \alpha.$$

$$\boxed{\alpha \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} f(n) \leqslant \alpha + 1.}$$

Partie II : Intégrales de Wallis

1) $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = [/\mathtt{sint}]_0^{\pi/2} = 1$.

$$\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient

$$I_n = \int_{\pi/2}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \times -du = \int_0^{\pi/2} \sin^n(u)\,du.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto /\mathtt{cos}^n\mathtt{t}$ est continue, positive et non nulle sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc $I_n > 0$.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos t \leqslant 1$ puis $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$ après multiplication des deux membres de l'inégalité par le réel positif $\cos^n t$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $I_{n+1} \leqslant I_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $I_{n+1} \leqslant I_n$ et donc la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Puisque cette suite est minorée par 0, on en déduit que cette suite converge vers un réel ℓ positif ou nul.

5) Soit $n \geqslant 2$. Les deux fonctions $t \mapsto$ et $t \mapsto$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \cos t \cos^{n-1} t \, dt = \left[\sin t \cos^{n-1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin t \times -(n-1) \sin t \cos^{n-2} t \, dt \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{n-2} t \, dt \; (\cos^{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ car } n-1 \geqslant 1) \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 t) \cos^{n-2} t/; dt = (n-1) \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t/; dt - \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt \right) \\
&= (n-1)(I_{n-2} - I_n),
\end{aligned}$$

et donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ou encore $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \; I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.}$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ puis après multiplication des deux membres de cette égalité par I_{n+1}, on obtient $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$. Ainsi, la suite $((n+1)I_{n+1}I_n)_{n/in\mathbb{N}}$ est constante puis $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; (n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}.}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \frac{1}{2} \times I_0 = \frac{(2n) \times (2n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{((2n)(2n-2)\ldots 2)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{(2^n n!}^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} a_n,$$

et

$$I_{2n+1} = \frac{\pi}{(2n+1)I_n} = \frac{1}{(2n+1)a_n}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \; I_{2n} = \frac{\pi}{2} a_n \text{ et } I_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)a_n}.}$$

8) **a)** Soit $n \geqslant 2$. Puisque la suite $(I_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $I_n \leqslant I_{n-1} \leqslant I_{n-2}$. Après division des trois membres de cet encadrement par le réel strictement positif I_n, on obtient $1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n-2}}{I_n}$.

b) D'après la question 5), $\forall n \geqslant 2$, $\dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-2}}{I_n} = 1$.

D'après la question 8)a) et le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$ ou encore $I_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

Mais alors $n^2 I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^2 I_n = \frac{\pi}{2}.}$$

c) Mais alors puisque $I_n > 0$, $I_n = \sqrt{I_n^2} = \dfrac{\sqrt{nI_n^2}}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

9) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $a_n^2 = \dfrac{2I_{2n}}{\pi} \times \dfrac{1}{(2n+1)I_{2n+1}} = \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \times \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$. Or $1 \leqslant \dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leqslant \dfrac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \dfrac{2n+1}{2n}$.

Par suite, $a_n^2 \geqslant \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \geqslant \dfrac{2}{(2n+2)\pi} = \dfrac{1}{(n+1)\pi}$ et donc $a_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}}$.

De même, $a_n^2 \leqslant \dfrac{2}{(2n+1)\pi} \times \dfrac{2n+1}{2n} = \dfrac{1}{n\pi}$ et donc $a_n \leqslant$ /dfrac1$\sqrt{\pi}\sqrt{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n+1}} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

b) Pour $n \geqslant 1$, $\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \leqslant \sqrt{\pi}\sqrt{n}a_n \leqslant 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\pi}\sqrt{n}a_n = 1$ ou encore que

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}.}$$

c) i) $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} > 0$ et puisque la série de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}n^{1/2}}$ diverge (car $\dfrac{1}{2} \leqslant 1$), la série de terme général a_n diverge.

ii) $\dfrac{a_n}{4n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n\sqrt{n}} > 0$ et puisque la série de terme général $\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ converge (car $\dfrac{3}{2} > 1$), la série de terme général $\dfrac{a_n}{4n+1}$ converge.

iii) La suite (I_{2n}) est décroissante d'après la question 4) et il en est de même de la suite $(a_n) = \left(\dfrac{2I_{2n}}{\pi}\right)$. De plus, d'après la question 9)a), la suite (a_n) tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

En résumé, la suite $(-1)^n a_n$ est alternée en signe et sa valeur absolue tend vers 0 en décroissant. On en déduit que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

iv) D'après la question ii), la série de terme général $\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ converge absolument et donc converge.

Partie III : Etude de F

1) Etude globale de F a) On a déjà vu que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = f$. Maintenant, la fonction $x \mapsto 1 + x^4$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et la fonction $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Il en est de même de F.

$$\boxed{F \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

b) La fonction $F' = f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $u = -t$, on obtient

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\ dt = \int_0^x f(-u)\ (-du) = -\int_0^x f(u)\ du = -F(x).$$

Donc

$$\boxed{F \text{ est impaire.}}$$

d) Soit $x \geqslant 1$.

$$F(x) - F(1) = \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\ dt \leqslant \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{t^4}}\ dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

e) Toute fonction définie sur $[A, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, croissante et majorée sur $[A, +\infty[$, admet une limite réelle en $+\infty$.

f) Pour tout réel $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant F(1) + 1 - \dfrac{1}{x} \leqslant F(1) + 1$. La fonction F est croissante sur $[1, +\infty[$ et majorée par $F(1) + 1$. Donc, la fonction F a une limite réelle en $+\infty$.

2) Etude locale de F **a)** D'après la question I.1)c), $F' = f$ admet en 0 un développement limité d'ordre 8 à savoir $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8 + o(x^8)$. On sait alors que F admet en 0 un développement limité d'ordre 9 obtenu par intégration :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + o(x^9).$$

b) En particulier, $F(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ et donc une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = x$. De plus, $F(x) - x \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{10}x^5 + o(x^5)$. Par suite, $F(x) - x$ est localement du signe de $-\frac{1}{10}x^5$ et donc (C) est au-dessus de (T) sur un voisinage de 0 à gauche et au-dessous sur un voisinage de 0 à droite.

c) Pour tout réel x, $F''(x) = f'(x) = -2x(1+x^4)^{-3/2}$. F'' s'annule en changeant de signe en $x = 0$ et donc (C) admet un point d'inflexion à savoir l'origine O.

3) Lien avec α **a)** Soit $x > 0$. En posant $u = \frac{1}{t}$, on obtient

$$F(x) - F(1) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}} \times -\frac{du}{u^2} = \int_{1/x}^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\,du = F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

b) Ainsi, pour $x > 0$, $F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right)$. Quand x tend vers $+\infty$, $F\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers $F(0) = 0$ par continuité de F en 0 et donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 2F(1).}$$

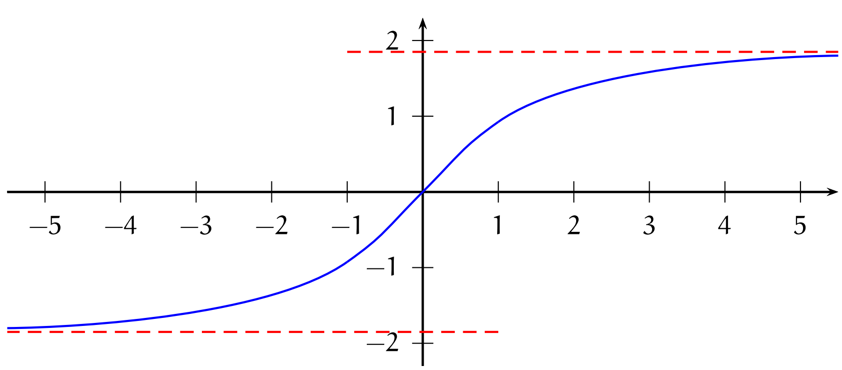
c) D'après la question I.3)c), $2F(1) = \alpha$. Puisque f est intégrable sur $[0, +\infty[$, F a une limite réelle quand x tend vers $+\infty$ à savoir $\alpha = 2F(1)$. On retrouve ainsi le résultat de la question III.3)b).

4) Tracé de (C) **a) Tableau de variations de F.**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
F	$-\alpha$ ↗	0	↗ α

b) $F(1) = \frac{\alpha}{2}$ et $F'(1) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1 est $y = F'(1)(x-1) + F(1)$ ou encore $y = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\alpha}{2}$.

c)



5) Quelques applications de F **a)** Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{2t^3}{1+t^4}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^4}$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ constituent donc un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + \frac{2t^3}{1+t^4} = \frac{1}{1+t^4} \\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, /; e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^4)}y'(t) + e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^4)}\frac{2t^3}{1+t^4}y(t) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(1+t^4)}}{1+t^4} \\
&\forall t \in \mathbb{R},\ \left(\sqrt{1+t^4}y\right)'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ \sqrt{1+t^4}y(t) = \lambda + F(t) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \frac{\lambda + F(t)}{\sqrt{1+t^4}}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+x^4}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,dt,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

b) i) D'après la question III.1)c), F est impaire. Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$M(-t) = \left(F(-t), \frac{1}{-t}\right) = \left(-F(t), -\frac{1}{t}\right) = s_O(M(t)).$$

Ainsi, la partie de la courbe correspondant à $t \in]-\infty, 0[$ est la symétrique par rapport à O de la partie de la courbe correspondant à $t \in]0, +\infty[$.
Si on étudie et on construit la courbe sur $]0, +\infty[$, la courbe complète est ensuite obtenue par symétrie de centre O.

ii) La fonction $x' = F' = f$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$. On en déduit le tableau de variations conjointes des fonctions x et y :

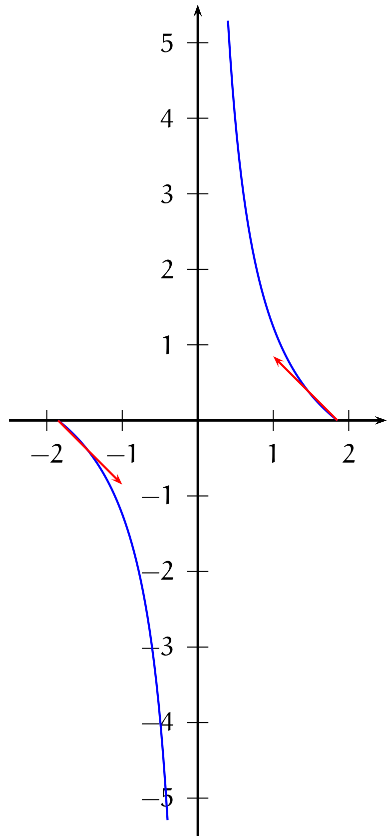
t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$		$+$	
x	$-\alpha$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	α
y	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	‖	$-$	

iii) Quand t tend vers $+\infty$, $M(t)$ tend vers le point $(\alpha, 0)$. On prolonge par continuité la courbe (Γ) en posant $M(\infty) = (\alpha, 0)$.

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{1}{t^2 f(t)} = -\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} -1.$$

On en déduit que (Γ) admet au point $M(\infty)$ une tangente de coefficient directeur -1.

iv) Tracé de (Γ)**.** Voir page suivante.



c) i) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

• $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant \sqrt{x^2+0} = \sqrt{x^2} = |x|$.

• $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4y^4}} = f(xy) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+0}} = 1$.

• $|F(xy)| = \left|\displaystyle\int_0^{xy} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt\right| = \displaystyle\int_0^{|xy|} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\, dt \leqslant \int_0^{|xy|} 1\, dt = |xy|$.

ii) φ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y) - \varphi(0,0)| &= \frac{x^2|F(x,y)|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{x^2|xy|}{x^2+y^2}\\ &\leqslant \frac{x^2 \times \frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \text{ (car } \frac{1}{2}(x^2+y^2) - |xy| = \frac{1}{2}(|x|-|y|)^2 \geqslant 0)\\ &= \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\dfrac{x^2}{2}$ tend vers 0 et donc $|\varphi(x,y) - \varphi(0,0)|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Par suite, φ est continue en $(0,0)$ et finalement

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

iii) • Soit $x \neq 0$.

$$\frac{\varphi(x,0) - \varphi(0,0)}{x-0} = \frac{1}{x} \times \frac{x^2F(0)}{x^2} = 0.$$

Par suite, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x,0) - \varphi(0,0)}{x-0} = 0$. On en déduit que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0)$ existe et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0) = 0$.

• Soit $y \neq 0$.

$$\frac{\varphi(0,y)-\varphi(0,0)}{y-0} = \frac{1}{y} \times \frac{0}{y^2} = 0.$$

Par suite, $\lim_{y \to 0} \frac{\varphi(0,y)-\varphi(0,0)}{x-0} = 0$. On en déduit que $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0$.

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0,0) = 0.}$$

iv) φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{(2xF(xy) + x^2yf(xy))(x^2+y^2) - x^2F(xy)(2x)}{(x^2+y^2)^2}F(xy) = \frac{xy(2yF(xy) + x(x^2+y^2)f(xy))}{(x^2+y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = x^2\frac{xf(xy)(x^2+y^2) - 2yF(xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2}|2yF(xy) + x(x^2+y^2)f(xy)| \leqslant \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \times (2|y||xy| + |x|(x^2+y^2))$$
$$\frac{1}{2(x^2+y^2)}\left(|y|(x^2+y^2) + |x|(x^2+y^2)\right) = \frac{|x|+|y|}{2}.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $\frac{|x|+|y|}{2}$ tend vers 0 et il en est de même de $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right|$. Par suite, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$.

De même, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}||xf(xy)(x^2+y^2) - 2yF(xy)| \leqslant \frac{1}{x^2+y^2}(|x|(x^2+y^2) + 2|y||xy|)$$
$$\leqslant \frac{1}{x^2+y^2}(|x|(x^2+y^2) + |y|(x^2+y^2)) = \frac{|x|+|y|}{2},$$

et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$. Finalement,

$$\boxed{\varphi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

Partie IV

1) Etude de h **a)** $\left|\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{\pi}n^{3/2}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

• Si $|x| \leqslant 1$, $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1}$ converge.

• Si $|x| > 1$, $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1}$ ne tend pas vers 0 d'après un théorème de croissances comparées. Dans ce cas, la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1}$ diverge.

Finalement,

$$\boxed{\text{le rayon de convergence de la série entière } \sum \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1} \text{ est égal à } 1.}$$

b) D'après la question précédente, la série numérique de terme général $\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}(-1)^{4n+1}$ est absolument convergente et donc convergente. On en déduit que $h(-1)$ et $h(1)$ existent.

c) La somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est continue sur $]-R, R[$. Si de plus, la somme de la série converge pour $t = R$ (resp. $t = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (resp. $[-R, 0]$). On en déduit que

$$\boxed{h \text{ est continue sur } [-1, 1].}$$

d) i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in [-1, 1]$, $\left|\dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1}\right| = \dfrac{a_n}{4n+1}|x|^{4n+1} \leqslant \dfrac{a_n}{4n+1}$. Puisque $\dfrac{a_n}{4n+1}$ est le terme général d'une série numérique convergente, la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$.

ii) Puisque chaque fonction $x \mapsto \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ est continue sur $[-1, 1]$ et que la série de fonctions de terme général $x \mapsto \dfrac{(-1)^n a_n}{4n+1}$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$, on sait que la somme h est continue sur $[-1, 1]$.

2) Développement en série entière de F **a)** Pour $x \in -1, 1[$,

$$(1+x)^\beta = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta(\beta-1)\ldots(\beta-n+1)}{n!}x^n.$$

b) Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} &= (1+x^4)^{-1/2} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}x^{4n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n n!}x^{4n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n)}{2^n n!(2 \times 4 \times \ldots \times (2n))}x^{4n} \\
1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}x^{4n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^{4n}.
\end{aligned}$$

puis par intégration,

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}x^{4n+1} = h(x).$$

c) On a déjà $\forall x \in]-1, 1[$, $F(x) = h(x)$. De plus F et h sont continues en 1. Par suite,

$$F(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} F(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} h(x) = h(1).$$

De même, $F(-1) = h(-1)$ par continuité de F et h en -1.

$$\boxed{\forall x \in [-1, 1],\ F(x) = h(x).}$$

d) $\alpha = 2F(1) = 2h(1) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}$.

3) Valeur approchée de α **a)** D'après la question II.9)c), la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{a_n}{4n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante en tant que produit de deux suites positives et décroissantes. D'après une majoration classique du reste d'ordre p d'une série alternée, on a $p \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha - 2S_p| = 2\left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4n+1}\right| \leqslant 2\left|\frac{(-1)^{p+1} a_{p+1}}{4(p+1)+1}\right| = \frac{2a_{p+1}}{4p+5}.$$

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question II.9)a)

$$|\alpha - 2S_p| \leqslant \frac{2a_{p+1}}{4p+5} \leqslant \frac{2}{4p+5} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{p+1}} \leqslant \frac{2}{4p+4} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{p+1}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}(p+1)^{3./2}}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} |\alpha - 2S_n| \leqslant 10^{-6} &\Leftarrow \frac{1}{2\sqrt{\pi}(n+1)^{3/2}} \leqslant 10^{-6} \Leftarrow (n+1)^{3/2} \geqslant \frac{10^6}{2\sqrt{\pi}} \\ &\Leftarrow n \geqslant \left(\frac{10^6}{2\sqrt{\pi}}\right)^{2/3} - 1 \Leftarrow n \geqslant 4300,2\ldots \\ &\Leftarrow n \geqslant 4301. \end{aligned}$$

$p = 4301$ convient.

