ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE **Session 2009**

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ELEVES INGENIEURS DU CONTROLE DE LA NAVIGATION AERIENNE

◆

Epreuve optionnelle obligatoire de MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 3

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
1 page d'avertissement
10 pages de texte recto/verso

◆

CALCULATRICE AUTORISEE

** RAPPORT D'EMISSION **

Nom : ENAC/BC Numéro : 0562174079 Date : 16-04-09 11:28

Date/Heure	16-04 11:28
Numéro composé	00590482000
Durée	0'10"
Mode	NORMAL
Pages	1
Résultat	Correct

* Nb. pages précédemment émises : 3

ERRATA MATHEMATIQUES OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

CONCOURS ICNA 2009

PAGE 2 QUESTION 7

Remplacer A par C

Remplacer B par D

RAPPORT D'EMISSION

Nom : ENAC/BC   Numéro : 0562174079   Date : 16-04-09 11:43

Date/Heure	16-04 9:35
Liste de diffusion	L_8
Durée totale	6'41"
Nb. pages du document	1

Correct : 4 5 7 8 9 10 13 14 15 16 17 18 19 21 24 27 28 29 52 53

Echec : 35 45

ERRATA MATHEMATIQUES OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

CONCOURS ICNA 2009

PAGE 5 - PREAMBULE QUESTION 18

LIRE $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

AU LIEU DE

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

RAPPORT D'EMISSION

Nom : ENAC/BC   Numéro : 0562174079   Date : 16-04-09 11:30

Date/Heure	16-04 11:13
Liste de diffusion	L_9
Durée totale	2'19"
Nb. pages du document	1

Correct : 0 11 22 23 26

ERRATA MATHEMATIQUES OPTIONNELLE OBLIGATOIRE

CONCOURS ICNA 2009

PAGE 6 - ~~QUESTION 25~~

DANS LA DEFINITION DE f)

LIRE x
AU LIEU DE z

✱✱ RAPPORT D'EMISSION ✱✱

Nom : ENAC/BC Numéro : 0562174079 Date : 16-04-09 11:22

Date/Heure	16-04 10:17
Liste de diffusion	L_9
Durée totale	6'50"
Nb. pages du document	1

Correct : 0 11 22 23 26

ERRATA MATHEMATIQUES ~~OPTIONNELLE~~ OBLIGATOIRE

CONCOURS ICNA 2009

PAGE 9 - QUESTION 37

b) LIRE $(2n)!$
AU LIEU DE $(2n!)$

c) LIRE $(2n)!$
AU LIEU DE $(2n!)$

ÉPREUVE OPTIONNELLE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES

A LIRE TRÈS ATTENTIVEMENT

L'épreuve «optionnelle obligatoire de mathématiques» de ce concours est un questionnaire à choix multiple qui sera corrigé automatiquement par une machine à lecture optique.

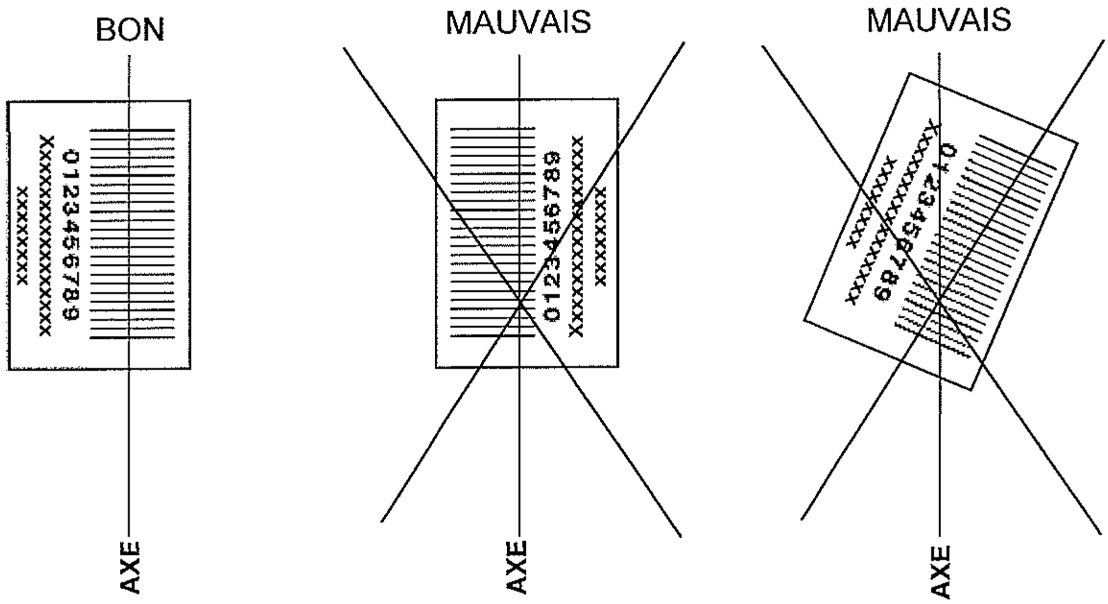
ATTENTION, IL NE VOUS EST DÉLIVRÉ QU'UN SEUL QCM

1) Vous devez coller dans la partie droite prévue à cet effet, **l'étiquette correspondant à l'épreuve que vous passez,** c'est-à-dire épreuve optionnelle obligatoire de mathématiques (voir modèle ci-dessous).

POSITIONNEMENT DES ÉTIQUETTES

Pour permettre la lecture optique de l'étiquette, le trait vertical matérialisant l'axe de lecture du code à barres (en haut à droite de votre QCM) doit traverser la totalité des barres de ce code.

EXEMPLES :



2) Pour remplir ce QCM, vous devez utiliser un STYLO BILLE ou une POINTE FEUTRE de couleur NOIRE.

3) Utilisez le sujet comme brouillon et ne retranscrivez vos réponses qu'après vous être relu soigneusement.

4) Votre QCM ne doit pas être souillé, froissé, plié, écorné ou porter des inscriptions superflues, sous peine d'être rejeté par la machine et de ne pas être corrigé.

5) Cette épreuve comporte 40 questions obligatoires, certaines, de numéros consécutifs, peuvent être liées. La liste de ces questions est donnée au début du texte du sujet.
Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

6) A chaque question numérotée entre 1 et 40, correspond sur la feuille-réponses une ligne de cases qui porte le même numéro (les lignes de 41 à 100 sont neutralisées). Chaque ligne comporte 5 cases a, b, c, d, e.
Pour chaque ligne numérotée de 01 à 40, vous vous trouvez en face de 4 possibilités :

▶ soit vous décidez de ne pas traiter cette question,
la ligne correspondante doit rester vierge.

▶ soit vous jugez que la question comporte une seule bonne réponse :
vous devez noircir l'une des cases a, b, c, d.

▶ soit vous jugez que la question comporte deux réponses exactes :
vous devez noircir deux des cases a, b, c, d et deux seulement.

▶ soit vous jugez qu'aucune des réponses proposées a, b, c, d n'est bonne :
vous devez alors noircir la case e.

Attention, toute réponse fausse entraîne pour la question correspondante une pénalité dans la note.

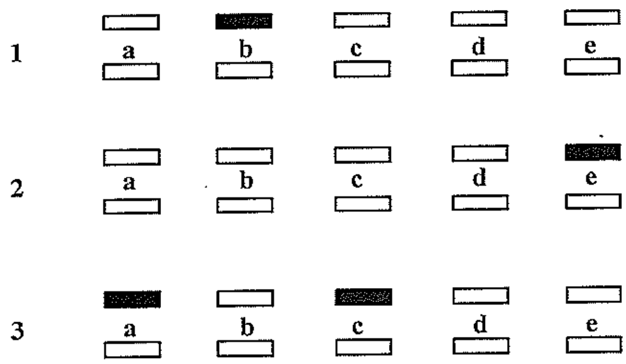
7) EXEMPLES DE RÉPONSES

<u>Question 1</u> : $1^2 + 2^2$ vaut
a) 3 b) 5 c) 4 d) -1

<u>Question 2</u> : le produit (-1) (-3) vaut
a) -3 b) -1 c) 4 d) 0

<u>Question 3</u> : les racines de l'équation $x^2 - 1 = 0$
a) 1 b) 0 c) -1 d) 2

Vous marquerez sur la feuille réponse :



Le sujet comporte 6 parties indépendantes.

- Partie 1 (Question 1 à 3)
- Partie 2 (Question 4 à 7)
- Partie 3 (Question 8 à 15)
- Partie 4 (Question 16 à 30)
- Partie 5 (Question 31 à 36)
- Partie 6 (Question 37 à 40)

Dans tout le sujet

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 3, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers positifs. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.
- $\mathbb{Z}$ désigne ensemble des entiers relatifs.
- $\mathbb{R}$ désigne le corps de nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

PARTIE 1

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on définit pour $x \in [0, \infty[$, la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$.

Question 1 *La suite de fonction f_n converge*

- *(a) uniformément sur $[0, \infty[$ et la fonction limite est continue.*
- *(b) uniformément $[0,1]$ et la fonction limite est continue.*
- *(c) uniformément sur $[0, \infty[$.*
- *(d) uniformément sur tout compact de $]0, \infty[$.*

Question 2 *Soit $v_n = \int_0^1 f_n(x)dx$*

- *(a) La suite v_n converge car elle est décroissante minorée.*
- *(b) La suite v_n converge car $0 \leq v_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}$.*
- *(c) La suite v_n converge car elle est croissante majorée.*
- *(d) La suite v_n converge car $0 \leq v_n \leq \frac{1}{1+x}$.*

Question 3 *Soit $w_n = \int_0^1 nx^n f(x)dx$*

- *(a) La suite w_n converge vers 1.*
- *(b) La suite w_n converge si et seulement si f est un polynôme.*
- *(c) La suite w_n converge vers $+\infty$ si f est positive.*
- *(d) La suite w_n converge si et seulement si f est dérivable.*

PARTIE 2

Soit A, B, C, D et M cinq matrices carrées de taille n sur le corps $\mathbb{C}$ et soit λ un nombre complexe non nul. On suppose que M n'est pas la matrice nulle. On notera $tr(X)$ la trace d'une matrice X.

Question 4

- *(a) Si A et B sont diagonalisables alors $A+B$ est diagonalisable.*
- *(b) Si A et B sont diagonalisables alors AB est diagonalisable.*
- *(c) Si A et B sont diagonalisables et ont les mêmes vecteurs propres alors AB est diagonalisable.*
- *(d) A est diagonalisable si et seulement si A^2 est diagonalisable.*

Question 5 *On supose que*

$$\begin{cases} M = \lambda(A+B) \\ M^2 = \lambda^2(A+B) \end{cases}$$

- *(a) $A+B$ et M ont trois valeurs propres distinctes et sont diagonalisables.*

(b) *$A+B$ et M ont trois valeurs propres distinctes et ne sont pas diagonalisables.*

(c) *$A+B$ et M ont deux valeurs propres distinctes et sont diagonalisables.*

(d) *$A+B$ et M ont deux valeurs propres distinctes et ne sont pas diagonalisables.*

Question 6 *On suppose A diagonalisable, soit P un polynôme*

(a) *si A et B ont même polynôme caractéristique, alors B est diagonalisable.*

(b) *si $A = P(B)$, alors B est diagonalisable.*

(c) *si A et B ont même polynôme caractéristique et A inversible, alors B est diagonalisable.*

(d) *si A et B ont même polynôme minimal, alors B est diagonalisable.*

Question 7 *On suppose maintenant que*

$$\begin{cases} C^2 = D^2 = -I_n \\ CD + DC = 0 \end{cases}$$

(a) *Le système a toujours une solution.*

(b) *Si le système possède une solution alors $tr(A) = tr(B) = 0$ et A et B sont diagonalisables.*

(c) *Si le système possède une solution alors $tr(A) = tr(B) = 1$.*

(d) *Si le système possède une solution si alors A et B ne sont pas diagonalisables.*

PARTIE 3

Soit t un nombre réel et Soit u_t l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$U_t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ t & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

Question 8 *La matrice U_0^2 est*

(a) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 1 \\ -8 & -8 & -2 \\ 28 & 24 & 5 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \\ 28 & 20 & 5 \end{pmatrix}$.

(c) U_0.

(d) $2U_0$.

Question 9 *On suppose dans cette question que $t \neq 0$*

(a) U_t *possède une et une seule valeur propre réelle.*

(b) U_t *possède deux valeurs propres réelles distinctes et une valeur propre complexe non réelle.*

(c) U_t *possède trois valeurs propres complexes non réelles.*

(d) U_t *possède trois valeurs propres complexes distinctes.*

Question 10

(a) 0 *est valeur propre de* U_0 *car* U_0 *n'est pas inversible.*

(b) 0 *est la seule valeur propre de* U_0 *car* U_0 *n'est pas inversible.*

(c) 0 *est valeur propre de* U_t *si et seulement si* $t \leq \frac{1}{3}$

(d) 0 *est valeur propre de* U_t *si et seulement Si* $t = 0$.

Question 11

(a) U_t *possède trois valeurs propres réelles distinctes pour tout* $t \geq -\frac{1}{3}$.

(b) U_t *possède trois valeurs propres réelles distinctes pour tout* $t > -\frac{1}{3}$.

(c) U_t *ne possède jamais trois valeurs propres réelles distinctes.*

(d) U_t *ne possède jamais trois valeurs propres réelles.*

Question 12 *On note* P_t *le polynôme caractéristique de* U_t.

(a) P_t *n'est jamais de degré* 3.

(b) P_t *est de degré* 3 *si et seulement si* u_t *possède trois valeurs propres réelles distinctes.*

(c) P_t *est de degré* 3 *si et seulement si* u_t *possède trois valeurs propres complexes non rélles distinctes.*

(d) P_t *est de degré* 3 *si et seulement si* u_t *possède trois valeurs propres distinctes.*

Question 13

(a) $P_t(U_t)$ *est la matrice identité.*

(b) $P_t(U_t)$ *est la matrice nulle.*

(c) $P_t(U_t)$ *est la matrice identité, si et seulement si* U_t *est diagonalisable.*

(d) $P_t(U_t)$ *est la matrice nulle, si et seulement si* U_t *est diagonalisable.*

Question 14 *On suppose maintenant que* $t = 0$ *ou* $t = -1/3$. *Pour* $n \geq 3$ *on effectue la division euclidienne de* X^n *par* P_t *et on note* Q_t *le quotient et* R_t *le reste*

(a) $R_0(X) = (2^{n-1} - 1)X^2 + (2 - 2^{n-1})X$.

(b) $R_0(X) = (2^n - 1)X^2 + (2 - 2^n)X$.

(c) $R_{-1/3}(X) = \frac{n(n-1)}{2}X^2 + n(2-n)X + \frac{n^2-3n+2}{2}$.

(d) $R_{-1/3}(X) = n(n-1)X^2 + n(2-n)X + n^2 - 3n + 2.$

Question 15 *On suppose maintenant que $t = 0$. On note $U = U_0$*

(a) $U^6 = \begin{pmatrix} 200 & 102 & 1 \\ -248 & -128 & 4 \\ 748 & 384 & 5. \end{pmatrix}.$

(b) $U^{10} = \begin{pmatrix} 3068 & 1536 & 1 \\ -4088 & -2048 & -2 \\ 12268 & 6144 & 5 \end{pmatrix}.$

(c) $U^n = \begin{pmatrix} 6.2^{n-1} - 4 & 3.2^{n-1} & 1 \\ 8(1 - 2^{n-1}) & -4.2^{n-1} & -2 \\ 4(6.2^{n-1} - 5) & 12.2^{n-1} & 5 \end{pmatrix}.$

(d) $U^n = \begin{pmatrix} 6.2^{n} - 4 & 3.2^{n} & 1 \\ 8(1 - 2^{n}) & -4.2^{n} & -2 \\ 4(6.2^{n} - 5) & 12.2^{n} & 5 \end{pmatrix}.$

PARTIE 4

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Soit $I =]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et w une fonction positive et continue de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'hypothèse suivante

$$\int_a^b |P(x)| w(x) dx < \infty \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X]. \qquad (H)$$

Question 16 *Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$. On pose*

$$< P, Q >= \int_a^b P(x)Q(x)w(x)dx.$$

(a) *L'hypothèse (H) ne suffit pas pour que $< P, Q >$ soit correctement définie.*

(b) *L'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est bilinéaire symétrique et elle définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$.*

(c) *L'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est bilinéaire symétrique et elle définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ que si il existe $x \in]a, b[$ tel que $w(x) > 0$.*

(d) *L'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est bilinéaire symétrique et elle définit une norme sur $\mathbb{R}[X]$ que si $w(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.*

Question 17 *Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynôme.*

(a) *$(P_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si pour tout n P_n est de degré n.*

(b) *$(P_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $(P_n)_n$ est une famille libre.*

(c) *$(P_n)_n$ est une base de $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si lorsque $k \neq l$ on a $< P_k, P_l >= 0$.*

(d) *$(P_n)_n$ ne peut être une base de $\mathbb{R}[X]$ car $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel de dimension infinie.*

On suppose maintenant que $I =]-1, 1[$, $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Pour tout entier naturel n et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ soit T_n le polynôme défini par

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Question 18

(a) *Comme* $w(1) = w(-1) = +\infty$, *l'hypothèse* (H) *n'est pas vérifiée.*

(b) (H) *est vérifiée que pour les polynômes* P *et* Q *vérifiant* $Q(1) = Q(-1) = P(1) = P(-1) = 0$.

(c) (H) *est vérifiée.*

(d) (H) *est vérifiée que pour les polynômes* P *et* Q *pour lesquels* $(X-1)(X+1)$ *divise* PQ.

Question 19

(a) *Il n'est pas vrai que* T_n *soit un polynôme.*

(b) *Il existe plusieurs polynôme* T_n.

(c) *Comme* $\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{E(n/2)}(-1)^p C_n^{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(1-\cos^2\theta)^p$, T_n *est bien un polynôme et il est unique (Ici* $E(x)$ *désigne la partie entière de* x, *et* C_n^k *est le coefficient binomial).*

(d) *Comme* $\cos(n\theta) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p C_n^{2p}(\cos\theta)^{n-2p}(1-\cos^2\theta)^p$, T_n *est bien un polynôme et il est unique.*

Question 20 *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $x \in]-1, 1[$ *on a*

(a) $T_n(\cos\theta) - T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta)$ *et donc* $T_{n+2} = -2XT_{n+1} + T_n$.

(b) $T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta)$ *et donc* $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

(c) $T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = 3\cos(\theta)T_{n+1}(\cos\theta)$ *et donc* $T_{n+2} = 3XT_{n+1} - T_n$.

(d) $T_n(\cos\theta) + T_{n+2}(\cos\theta) = \cos(\theta)^2T_{n+1}(\cos\theta)$ *et donc* $T_{n+2} = X^2T_{n+1} - T_n$.

Question 21

(a) T_n *est unitaire de degré* n.

(b) T_n *est de degré* n *de coefficient dominant* 2^n.

(c) $T_3 = 8X^3 - 3X$.

(d) T_n *est de degré* $n+1$ *de coefficient dominant* 2^{n-1}

Question 22

(a) T_n *est une fonction paire.*

(b) T_n *est une fonction impaire.*

(c) T_n *a la même parité de* n.

(d) T_n *a la parité contraire de* n.

Question 23

(a) *Pour tout entier* $n < T_n, T_n >= 1$.

(b) *Pour tous entiers* n *et* p, $< T_n, T_p >= 0$.

(c) T_n *est une base orthogonale de* $\mathbb{R}[X]$.

(d) T_n *est une base orthonormale de* $\mathbb{R}[X]$.

On suppose maintenant que $w(x) = \exp(-x^2)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x^2}\right]$$

L'objectif des questions qui suivent est d'étudier pour $n \in \mathbb{N}$ l'équation différentielle (E_n).

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0. \qquad (E_n)$$

Question 24

(a) (E_n) *est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.*

(b) (E_n) *est une équation différentielle linéaire à coefficients non constants.*

(c) E_0 *admet une unique solution.*

(d) *Si* f *est solution de* E_0 *alors* $f'(x) = e^{x^2}$.

Question 25 *On s'intéresse dans cette question aux solutions* f *de* (E_n) *développables en séries entières. Soit* $S_n = \{f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, *solution de*$(E_n)\}$.

(a) S_n *est un espace vectoriel de dimension finie et si* $f \in S_n$, $g \in S_n$ *vérifient* $f(0)g(0)f'(0)g'(0) \neq 0$ *alors* f *et* g *ont le même rayon de convergence.*

(b) *Si* $f \in S_n$ *alors le rayon de convergence de* f *vaut 1.*

(c) *Pour tout* $f \in S_n$, $a_{2k} = 0$ *pour* k *suffisament grand.*

(d) *Pour tout* $f \in S_n$, $a_{2k+1} = 0$ *pour* k *suffisament grand.*

Question 26

(a) *Pour tout* n, S_n *est de dimension* 2 *et il existe une base de* S_n *dans laquelle un des vecteurs de bases est un polynôme.*

(b) *Pour tout* n, S_n *est de dimension* 2 *et il existe une base de* S_n *dans laquelle les deux vecteurs de bases sont des polynômes.*

(c) *Pour tout* n, S_n *est de dimension* 3 *et il existe une base de* S_n *dans laquelle un des vecteurs de bases est un polynôme.*

(d) *Pour tout* n, S_n *est de dimension* 3 *et il existe une base de* S_n *dans lequelle les trois vecteurs de bases sont des polynômes.*

Question 27

(a) $H_n(x) = e^{x^2} P_n(x)$ où P_n est un polynôme de degré n.

(b) $H_n(x)$ est une fonction polynomiale paire de degré n.

(c) $H_n(x)$ est une fonction polynomiale impaire de degré n.

(d) $H_n(x)$ n'est pas une fonction polynômiale

Question 28

(a) La suite $(H_n)_n$ est orthogonale et $< H_n, H_n >= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

(b) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $< P, H_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} P(t).e^{-t^2} dt$.

(c) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $< P, H_n >= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dt^n} P(t).e^{-t^2} dt$.

(d) Si $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $< P, H_n >$ nest pas définie car e^{x^2} n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Question 29

(a) H_n est solution de E_n et $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$.

(b) H_n est solution de E_n si et seulement si n est pair.

(c) H_n est l'unique solution de E_n.

(d) H_n est l'unique solution non nulle de E_n.

On suppose maintenant que la fonction w est continue positive sur I. Vérifiant $\int_a^b w(x)dx \neq 0$

Question 30

(a) Alors il est toujours possible de construire une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $< P_i, P_j >= \delta_{i,j}$ et P_n est de degré n (avec $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon).

(b) Pour pouvoir construire une telle suite il faut que w soit dérivable.

(c) On peut construire une telle suite si on suppose de plus que w ne s'annule pas sur I.

(d) On peut trouver une fonction w pour laquelle une telle suite de polynôme n'existe pas.

PARTIE 5

Question 31 *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$.*

(a) f est deux fois dérivable en 0 car $\left|\frac{f(x)}{x^2}\right| \leq |x|$.

(b) f est deux fois dérivable en 0 car f admet un développement limité à l'ordre 2 en 0.

(c) f est une fois dérivable en 0 car f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0.

(d) *f ne peut admettre de développement limité à l'ordre 2 en 0 car f n'est pas deux fois dérivable en 0.*

Question 32 *Soit* $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ *pour* $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[-\{0\}$.

(a) *f admet en 0 le développement limité suivant* $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + o(x^2)$ *et par suite f est prolongeable par continuité en 0.*

(b) $\cos(0) = 1$ *donc on peut prolonger f en 0 en posant* $f(0) = 0$.

(c) $\lim_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$ *donc* $\lim_{x\to 0} |f(x)| = +\infty$.

(d) *A l'aide d'un dévelopement limité de f en 0, on peut montrer que f est dérivable en 0 et que* $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Question 33 *Soit* $f : [a,b] \to$ *une fonction de classe* C^1 *. Posons* $M = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

(a) $M < \infty$ *et* $|\int_a^b f(t)dt| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$.

(b) $M < \infty$ *et si* $f(a) = f(b) = 0$ $|\int_a^b f(t)dt| \leq M\frac{(b-a)^2}{2}$.

(c) $M < \infty$ *et* $|\int_a^b f(t)dt| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

(d) $M < \infty$ *et si* $f(a) = f(b) = 0$ $|\int_a^b f(t)dt| \leq M\frac{(b-a)^2}{4}$.

Question 34 *Soit f la fonction définie pour* $x < 1$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) & si\ 0 < x < 1 \\ 1 & si\ x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x}) & si\ x < 0. \end{cases}$$

(a) *f n'est pas continue en* 0.

(b) *f est continue en* 0 *mais elle n'est pas dérivable en* 0.

(c) *f est dérivable en* 0 *et* $f'(0) = 3$.

(d) *f est dérivable en* 0 *et admet en* 0 *un développement limité à l'ordre* 2 *donné par*

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{5} + o(x^2).$$

Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1-x}$ définie pour $x \in]-1, 1[$ et soit C le cercle de centre $(-2, 2)$ passant par $(0, 0)$. On note C_f la courbe représentative de f.

Question 35 *Soit* $C_i = \{(x,y) \in C,\ y \leq 2\}$

(a) $C_i = \{(x, 2 - \sqrt{4 - 4x - x^2}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

(b) $C_i = \{(x, 2 + \sqrt{4 - 4x - x^2}),\ x \in \mathbb{R}\}$.

(c) $C_i = \{(x, 2 - \sqrt{4 - 4x - x^2}),\ x \in [-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}]\}$.
(d) $C_i = \{(x, 2 + \sqrt{4 - 4x - x^2}),\ x \in [-2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}]\}$.

Question 36 *Au voisinage de $x = 0$,*

(a) *C_f est au-dessus de C.*

(b) *C_f est au-dessous de C.*

(c) *C_f est au-dessous de C si $x > 0$ et au-dessus si $x < 0$.*

(d) *C_f est au-dessous de C si $x < 0$ et au-dessus si $x > 0$.*

PARTIE 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E_n = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ et C_n (resp. D_n) l'ensemble des applications ϕ de E_n à valeurs dans $\mathbb{N}$ (resp $\mathbb{Z}$) vérifiant $\phi(0) = 0$ et $\phi(2n) = 0$ et $|\phi(x+1) - \phi(x)| = 1$ pour tout $x \in E_n$. On admettra qu'il n'y a qu'un nombre fini de fonction ϕ dans C_n et dans D_n. On notera respectivement c_n et d_n ces nombres. Par convention on posera $c_0 = d_0 = 1$.

Question 37

(a) $c_n \leq d_n$ *et* $d_n = 2^n$.
(b) $c_n \leq d_n$ *et* $d_n = \frac{(2n!)}{n!n!}$.
(c) $c_n \geq d_n$ *et* $d_n = \frac{(2n!)}{n!n!}$.
(d) $c_n \geq d_n$ *et* $d_n = 2^n$.

On admettra aussi que c_n vérifie pour $n \geq 1$ $c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k}$. On pose $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n x^n$, $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} d_n x^n$.

Question 38

(a) *g est une série entière de rayon de convergence $1/2$, donc f est une série entière de rayon de convergence $1/2$.*

(b) *g est une série entière de rayon de convergence $1/2$, donc f est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1/2$.*

(c) *g est une série entière de rayon de convergence $1/4$, donc f est une série entière de rayon de convergence $1/4$.*

(d) *g est une série entière de rayon de convergence $1/4$, donc f est une série entière de rayon de convergence $R \geq 1/4$.*

Question 39 *En utilisant la relation liant les coefficient c_n, on peut montrer que pour les x pour lesquels f est bien définie on a :*

(a) $f(x) = f^2(x)$.
(b) $f(x) = 1 + f^2(x)$.

(c) $f(x) = 1 + xf^2(x)$.

(d) $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Question 40 *On peut montrer en utilisant le développement en série entière de f que*

(a) $c_n = \frac{d_n}{2}$

(b) $c_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$

(c) $c_n = d_n/n$

(d) $c_n = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$