J. 10 0579

ÉCOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE Session 2010

CONCOURS DE RECRUTEMENT D'ÉLÈVES INGÉNIEURS DU CONTRÔLE DE LA NAVIGATION AÉRIENNE

◆

Épreuve commune obligatoire de MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 2

◆

Ce sujet comporte :

1 page de garde
2 pages d'instructions pour remplir le QCM recto/verso
1 page « questions liées »
12 pages de texte recto/verso

◆

CALCULATRICE AUTORISÉE

QUESTIONS LIÉES
1 à 20
21 à 40

PARTIE I

Soit E un espace euclidien de dimension 4 rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B}=(e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère l'endomorphisme $f_{a,b}$ de E qui à tout vecteur de E de coordonnées (x, y, z, t) dans la base $\mathcal{B}$ associe le vecteur de coordonnées $(a^2x+aby+abz+b^2t,\ abx+a^2y+b^2z+abt,\ abx+b^2y+a^2z+abt,\ b^2x+aby+abz+a^2t)$ dans la base $\mathcal{B}$, a et b étant des réels fixés. On note (. / .) le produit scalaire défini sur E
On désigne par id l'endomorphisme identité de E et par o la loi de composition des applications.

Question 1 : Pour tout couple (a,b) de réels, l'endomorphisme $f_{a,b}$

A) est symétrique car $f_{a,b} \circ f_{a,b} = f_{a,b}$
B) est symétrique car $(f_{a,b}(u)/u) = (u/f_{a,b}(u))$ pour tout vecteur u de E
C) n'est pas symétrique
D) est symétrique car $(f_{a,b}(u)/v) = (u/f_{a,b}(v))$ pour tout vecteur u et v de E

Question 2 : La matrice $M_{a,b}$ de l'endomorphisme $f_{a,b}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit

A) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2 & b^2 & ab & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \\ a^2 & b^2 & ab & ab \end{pmatrix}$ B) $\begin{pmatrix} b^2 & ab & ab & a^2 \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$ D) $\begin{pmatrix} b^2 & ab & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ a^2 & ab & ab & b^2 \end{pmatrix}$

Question 3 : L'endomorphisme $f_{a,b}$ est de rang

A) inférieur ou égal à 3 pour tout couple de réels (a,b)
B) non nul car $f_{a,b}$ est différent de l'endomorphisme nul pour tout couple de réels (a,b)
C) 4 pour tout couple (a,b) de réels non nuls car le rang d'une matrice est égal au nombre de colonnes linéairement indépendantes de cette matrice
D) supérieur ou égal à 1 pour tout couple de réels (a,b) différent de (0,0)

Question 4 : La matrice $M_{a,b}$ est

A) symétrique pour tout couple (a,b) de réels
B) antisymétrique pour tout couple (a,b) de réels
C) inversible pour tout couple (a,b) de réels car l'endomorphisme $f_{a,b}$ est bijectif
D) inversible pour tout couple (a,b) de réels tels que a soit non nul et a^2 différent de b^2, car toute matrice de trace non nulle est inversible

Question 5 : Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)=\det(f_{a,b}-\lambda id)$ de l'endomorphisme $f_{a,b}$ vérifie

A) est de degré 4 car de manière générale le degré du polynôme caractéristique est égal à la dimension de l'espace de définition de l'endomorphisme

B) $\chi(\lambda)=(\lambda-(a+b)^2)(\lambda-a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ ab & \lambda-a^2 & -1 \\ ab & -b^2 & 1 \end{vmatrix}$

C) n'est pas divisible par λ car $f_{a,b}$ est un automorphisme pour tout couple (a,b)

D) $\chi(\lambda)=((a+b)^2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & ab & ab & b^2 \\ 1 & a^2-\lambda & b^2 & ab \\ 0 & \lambda-a^2+b^2 & a^2-b^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2-\lambda \end{vmatrix}$

Question 6 : Pour tout couple (a,b) de réels l'endomorphisme $f_{a,b}$

A) a pour valeur propre les racines de tout polynôme annulateur de $f_{a,b}$

B) a toutes ses valeurs propres réelles car la matrice $M_{a,b}$ est symétrique réelle

C) admet au moins 2 valeurs propres distinctes

D) ne peut admettre 0 pour valeur propre car $f_{a,b}$ est un automorphisme pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$

Question 7 : L'endomorphisme $f_{a,b}$

A) n'est pas diagonalisable pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ car ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes pour certains couples (a,b)

B) est diagonalisable pour tout couple (a,b) de réels car l'endomorphisme est bijectif

C) est, pour tout couple (a,b) de réels, diagonalisable dans une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de $f_{a,b}$ car $f_{a,b}$ est symétrique

D) n'est ni diagonalisable ni trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ car le polynôme caractéristique χ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

Question 8 : On suppose dans cette question l'un des deux paramètres a ou b nul. L'endomorphisme $f_{a,b}$ admet alors

A) au moins une valeur propre de multiplicité 2 pour tout couple (a,b)

B) une valeur propre de multiplicité 4 pour tout couple (a,b)

C) 0 pour valeur propre unique lorsque a=b

D) quatre valeurs propres distinctes pour certains couples (a,b)

Question 9 : On suppose, dans cette question, les réels a et b non nuls. L'endomorphisme $f_{a,b}$ admet alors

A) une valeur propre double et deux valeurs propres simples lorsque $a^2=b^2$

B) une valeur propre triple et une valeur propre simple lorsque $a^2=b^2$

C) une valeur propre double et deux valeurs propres simples lorsque a^2 est différent de b^2

D) deux valeurs propres doubles lorsque a^2 est différent de b^2

Question 10 : La base $\mathcal{B}$ est une base orthonormale formée de vecteurs propres de l'endomorphisme $f_{a,b}$ pour les couples (a,b) de réels tels que

A) a = 0 et b non nul
B) a = b = 0 uniquement
C) a quelconque et b = 0
D) a et b non nuls

Question 11 : Une base orthonormale (V_1,V_2,V_3,V_4) de E formée de vecteurs propres de l'endomorphisme $f_{a,b}$

A) ne peut exister pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ car $f_{a,b}$ n'est pas diagonalisable pour certains couples (a,b)

B) est constituée, pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, par les vecteurs
$V_1=(1,1,1,1)$ $V_2=(0,1,-1,0)$ $V_3=(1,-1,-1,1)$ $V_4=(-1,0,0,1)$

C) est constituée par les vecteurs
$V_1=(½)(1,1,1,1)$ $V_2=(½)(1,-1,-1,1)$ $V_3=(1/\sqrt{2})(0,1,-1,0)$ $V_4=(1/\sqrt{2})(-1,0,0,1)$
uniquement pour les couples (a,b) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant ab non nul et a^2 différent de b^2

D) est constituée, pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, par les vecteurs
$V_1=(½)(1,1,1,1)$ $V_2=(1/\sqrt{2})(0,1,-1,0)$ $V_3=(½)(1,-1,-1,1)$ $V_4=(1/\sqrt{2})(-1,0,0,1)$

Question 12 : De manière générale pour qu'une matrice N soit orthogonale

A) il est nécessaire qu'elle soit carrée et inversible
B) il est nécessaire que son déterminant soit égal à 1
C) il faut et il suffit qu'elle vérifie ${}^tN\,N = I$ où I désigne la matrice unité
D) il faut et il suffit que $(\det N)^2 = 1$

Question 13 : La matrice P définie par

$$P = (½)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A) n'est pas une matrice orthogonale
B) est une matrice orthogonale car les vecteurs colonnes forment une famille orthonormale

C) est une matrice de passage telle que $P\,M_{a,b}\,P^{-1} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

D) est une matrice de passage telle que ${}^tP\,M_{a,b}\,P = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$

Question 14 : Soit Q, si elle existe, une matrice symétrique orthogonale dont les colonnes sont des vecteurs propres de l'endomorphisme $f_{a,b}$ et de la forme

$$Q = c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & \gamma \\ 1 & 1 & \gamma & \beta \end{pmatrix} \text{ où } c, \alpha, \beta, \gamma \text{ sont des réels}$$

A) il n'existe pas une telle matrice Q
B) $\alpha = 1$; $\beta = \gamma = -1$ et c réel quelconque
C) $\alpha = 1$; $\beta = \gamma = -1$ et $c = ½$
D) $\alpha = \gamma = 1$; $\beta = -1$ et $c = ½$

Question 15 : On suppose, dans cette question, a^2 différent de b^2. Soit W un vecteur de E de coordonnées (w_1,w_2,w_3,w_4) dans la base $\mathcal{B}$. Le vecteur X de E tel que $f_{a,b}(X) = W$ a pour coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ le quadruplet (x,y,z,t) défini par

A) $x = w_1/(a+b)^2$ $\quad y = w_2/(a-b)^2$ $\quad z = w_3/(a^2-b^2)$ $\quad t = w_4/(a^2-b^2)$
B) $x = (a^2 w_1 - abw_2 - abw_3 + b^2 w_4)/(a^2-b^2)^4$ $\quad y = (-abw_1 + a^2 w_2 + b^2 w_3 - abw_4)/(a^2-b^2)^4$
$z = (-abw_1 + b^2 w_2 + a^2 w_3 - abw_4)/(a^2-b^2)^4$ $\quad t = (b^2 w_1 - abw_2 - abw_3 + a^2 w_4)/(a^2-b^2)^4$
C) $x = (a^2 w_1 + abw_2 + abw_3 + b^2 w_4)/(a^2-b^2)^2$ $\quad y = (abw_1 + a^2 w_2 + b^2 w_3 + abw_4)/(a^2-b^2)^2$
$z = (abw_1 + b^2 w_2 + a^2 w_3 + abw_4)/(a^2-b^2)^2$ $\quad t = (b^2 w_1 + abw_2 + abw_3 + a^2 w_4)/(a^2-b^2)^2$
D) $x = (-a^2 w_1 + abw_2 + abw_3 - b^2 w_4)/(a^2-b^2)^2$ $\quad y = (abw_1 - a^2 w_2 - b^2 w_3 + abw_4)/(a^2-b^2)^2$
$z = (abw_1 - b^2 w_2 - a^2 w_3 + abw_4)/(a^2-b^2)^2$ $\quad t = (-b^2 w_1 + abw_2 + abw_3 - a^2 w_4)/(a^2-b^2)^2$

Question 16 : On considère le système différentiel

$$(S)\begin{cases} x_1' = a^2 x_1 + abx_2 + abx_3 + b^2 x_4 \\ x_2' = abx_1 + a^2 x_2 + b^2 x_3 + abx_4 \\ x_3' = abx_1 + b^2 x_2 + a^2 x_3 + abx_4 \\ x_4' = b^2 x_1 + abx_2 + abx_3 + a^2 x_4 \end{cases} \quad \text{où } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ sont des fonctions de } t$$

A) L'ensemble des solutions du système (S) est réduit à un seul élément
B) L'ensemble des solutions de (S) est un espace vectoriel de dimension 3
C) La solution générale du système (S) s'écrit

$$C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}e^{(a+b)^2 t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{(a-b)^2 t} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}e^{(a-b)(a+b)t} + C_4\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{(a-b)(a+b)t}$$

où C_i sont des constantes

D) La solution générale du système (S) s'écrit

$$C_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}e^{(a+b)^2 t} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{(a-b)^2 t} + C_3\begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}e^{(a-b)(a+b)t} + C_4\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}e^{(a-b)(a+b)t}$$

où C_i sont des constantes

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$ des endomorphismes $f_{a,b}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ lorsque les couples (a,b) décrivent $\mathbb{R}^2$

Question 17 : Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ deux matrices de $\mathcal{M}$. On a

A) $M_{a,b}M_{a',b'} = M_{A,B}$ avec $A= ab'+ba'$ et $B= aa'+bb'$

B) $\mathcal{M}$ est un sous anneau de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ mais n'est pas un sous espace vectoriel

C) $\mathcal{M}$ n'est pas un sous anneau de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}$ n'est pas stable pour la multiplication des matrices

D) $\mathcal{M}$ n'est ni un sous anneau, ni un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ car $\mathcal{M}$ n'est pas stable pour l'addition des matrices

Question 18 : Soit $P_{a,b}$ le polynôme défini, pour tout couple (a,b) de réels, par $P_{a,b}(x) = a+bx$. On note R_n le reste de la division euclidienne de $(P_{a,b}(x))^n$ par (x^2-1). On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 2

A) $R_n(x)= (½)\,[(a-b)^n+(a+b)^n] +(½)\,[(a-b)^n-(a+b)^n]x$

B) $R_n(x)= [(a-b)^n+(a+b)^n] + [(a-b)^n-(a+b)^n]x$

C) $M_{a,b}^n = Q\,D_{a,b}^n\,Q = M_{A,B}$ avec $A= (½)\,[(a-b)^n+(a+b)^n]$ et $B= (½)\,[(a-b)^n-(a+b)^n]$

et $$D_{a,b}=\begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

D) $M_{a,b}^n = P\,D_{a,b}^n\,{}^tP = M_{A,B}$ avec $A= (½)\,[(a-b)^n+(a+b)^n]$ et $B= (½)\,[(a-b)^n-(a+b)^n]$

et $$D_{a,b}=\begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}$$

On suppose dorénavant l'endomorphisme $f_{a,b}$ non bijectif et $M_{a,b}$ désigne toujours la matrice de $f_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$

Question 19 : le rang de l'endomorphisme $f_{a,b}$ est

A) égal à 2 car deux des lignes de la matrice $M_{a,b}$ sont linéairement indépendantes

B) égal à 1 car les quatre colonnes de la matrice $M_{a,b}$ sont soit égales, soit opposées

C) inférieur ou égal à 1 car les quatre colonnes de la matrice $M_{a,b}$ sont égales

D) différent de 0

Question 20 : (a,b) et (a',b') étant des couples de réels, on a l'égalité $M_{a,b}M_{a',b'} = 0$ pour

A) a' et b' quelconques pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$

B) b'= a' , avec a' réel quelconque, pour b= –a pour tout a réel tel que $f_{a,b}$ soit différent de l'endomorphisme nul et b'= –a' , avec a' réel quelconque, pour b= a pour tout a réel tel que $f_{a,b}$ soit différent de l'endomorphisme nul

C) b'= a' , avec a' réel quelconque, pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ soit différent de l'endomorphisme nul

D) b'= –a' , avec a' réel quelconque, pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $f_{a,b}$ soit différent de l'endomorphisme nul

PARTIE II

Soit λ un réel n'appartenant pas à l'ensemble **Z** des entiers relatifs. On considère la suite de terme général u_n, n entier strictement positif, défini, pour tout n entier supérieur ou égal à 1, par $u_n = \int_0^{\pi} \cos(\lambda x)\cos(nx)\,dx$

Question 21 : On a, pour tout n entier strictement positif,

A) $\cos(\lambda x)\cos(nx) = (½)\,[\cos((\lambda+n)x) - \cos((\lambda-n)x)]$

B) $\cos(\lambda x)\cos(nx) = (½)\,[\sin((\lambda-n)x) + \sin((\lambda+n)x)]$

C) $\sin(\lambda x)\sin(nx) = (½)\,[\cos((\lambda+n)x) + \cos((\lambda-n)x)]$

D) $\cos(\lambda x)\cos(nx) = (½)\,[\sin((\lambda+n)x) - \sin((\lambda-n)x)]$

Question 22 : On obtient, pour tout n entier strictement positif,

A) $u_n = (½)(\sin(\lambda\pi))[(1/(\lambda+n)) + (1/(\lambda-n))]$

B) $u_n = (-1)^n(½)(\sin(\lambda\pi))[(1/(\lambda+n)) + (1/(\lambda-n))]$

C) $u_n = (-1)^{n+\lambda}\lambda/(\lambda^2 - n^2)$

D) $u_n = (-1)^n\lambda(\sin(\lambda\pi))/(\lambda^2 - n^2)$

Question 23 : La série numérique de terme général u_n, n entier strictement positif,

A) converge d'aprés le critère des équivalents car u_n est équivalent à $(-1)^{n+1}\lambda(\sin(\lambda\pi))/n^2$ terme général d'une série alternée convergente

B) converge puisqu'elle est absolument convergente d'aprés le critère des équivalents car $|u_n|$ est équivalent à $1/n^2$ terme général d'une série convergente

C) converge puisqu'elle est absolument convergente d'aprés le critère des équivalents car $|u_n|$ est équivalent à $|\lambda\sin(\lambda\pi)|/n^2$ terme général d'une série convergente

D) diverge pour certaines valeurs du paramètre λ

Question 24 : La série de fonctions, de la variable réelle λ, de terme général v_n défini, pour tout n entier strictement positif et pour tout λ réel non entier, par $v_n(\lambda) = u_n$

A) est normalement convergente sur tout intervalle fermé de l'intervalle $]k, k+1[$ pour tout k appartenant à $\mathbf{Z}$

B) est normalement convergente sur IR car toute série absolument convergente est normalement convergente

C) est normalement convergente sur IR–$\mathbf{Z}$

D) ne converge normalement sur aucun intervalle de IR

On considère, pour n entier strictement positif fixé, la fonction C_n définie, pour tout x réel, par

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Question 25 : On a pour tout n entier strictement positif

A) $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = (1-e^{i(n+1)x})/(1-e^{ix})$ pour tout x réel

B) $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = (1-e^{inx})/(1-e^{ix})$ pour tout x réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbf{Z}$

C) $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = n$ pour tout x appartenant à $2\pi\mathbf{Z}$

D) $\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = in$ pour tout x appartenant à $2\pi\mathbf{Z}$

Question 26 : Pour tout n entier strictement positif la fonction C_n

A) est, pour tout x réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbf{Z}$, définie par
$C_n(x) = \{[\sin((2n+1)x/2) + \sin(x/2)]/(2\sin(x/2))\} - 1$

B) est, pour tout x réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbf{Z}$, définie par
$C_n(x) = [\sin((2n+1)x/2)/(2\sin(x/2))] + (1/2)$

C) est continue sur IR car $C_n(x)$ tend vers n lorsque x tend vers $2k\pi$, k appartenant à $\mathbf{Z}$

D) n'est pas continue aux points de $2\pi\mathbf{Z}$

Soit f la fonction réelle de la variable réelle définie sur le segment I =[0 , π] par
$f(x) = [\cos(\lambda x) -1]/\sin(x/2)$ si $0<x\leq\pi$ et $f(0)= l$, l réel

Question 27 : La fonction f est

A) continue sur I si et seulement si $l=0$ car la fonction f est équivalente au voisinage de 0 à $\lambda^2 x$

B) continue sur I si et seulement si $l = -\lambda^2$

C) continue mais n'est pas de classe C^1 sur I lorsque $l=0$

D) de classe C^1 sur I si et seulement si $l=0$ car $f'(x)$ tend vers $-\lambda^2$ lorsque x tend vers 0

Dans la suite on donne à l la valeur faisant de f, si cela est possible, une fonction de classe C^1 sur I

Question 28 :

A) La fonction $f(x)\sin((2n+1)x/2)$ est continue sur IR donc intégrable sur le segment I

B) La fonction $\sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)$ est définie et continue sur I

C) La fonction $\sin((2n-1)x/2)/\sin(x/2)$ est intégrable sur I car continue sur]0 , π] et prolongeable par continuité par $(2n-1)$ en 0

D) La fonction $\sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)$ n'est pas intégrable sur I car elle n'est pas définie en 0

Question 29 : Pour tout n entier strictement positif,on note S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_k), k entier supérieur ou égal à 1. On a, pour tout λ réel n'appartenant pas à **Z** et pour tout n entier strictement positif

A) $S_n = [(\sin(\lambda\pi))/2\lambda] + (½)\int_0^{\pi}\cos(\lambda x)\sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)\,dx$

B) $S_n = -[(\sin(\lambda\pi))/2\lambda] + (½)\int_0^{\pi}\cos(\lambda x)\sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)\,dx$

C) $S_n = [(\sin(\lambda\pi))/2\lambda] + (½)\int_0^{\pi} f(x)\sin((2n+1)x/2)dx + (½)\int_0^{\pi}\sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)dx$

D) $S_n = -[(\sin(\lambda\pi))/2\lambda] + (½)\int_0^{\pi} f(x)\sin((2n-1)x/2)dx + (½)\int_0^{\pi}\sin((2n-1)x/2)/\sin(x/2)dx$

Question 30 : Pour tout n entier strictement positif,on pose $I_n = \int_0^{\pi} f(x)\sin((2n+1)x/2)dx$.

Pour tout λ réel n'appartenant pas à $\mathbf{Z}$

A) $|I_n| \leq [1/(n-(½))] \int_0^{\pi} |f'(x)|\, dx$ pour tout n entier supérieur ou égal à 1

B) La suite (I_n), n entier strictement positif, converge vers 0 car on peut, par application du théorème de convergence dominée, justifier l'interversion entre limite quand n tend vers $+\infty$ et intégrale sur $[0, \pi]$

C) La suite (I_n), n entier strictement positif, converge vers 0 car f' est continue sur $[0, \pi]$ donc bornée sur ce segment indépendamment de n puisque f ne dépend pas de n

D) La suite (I_n), n entier strictement positif, diverge car la suite de terme général $\sin((2n+1)x/2)$ n'admet pas de limite sur $[0, \pi]$

Question 31 : Pour tout n entier naturel, on pose $J_n = \int_0^{\pi} \sin((2n+1)x/2)/\sin(x/2)dx$.

A) La suite (J_n), n entier naturel, converge vers $\pi/2$ car pour tout n entier naturel $J_n = J_0$

B) La suite (J_n), n entier naturel, diverge

C) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n 2\lambda/(\lambda^2 - n^2) = [\pi/\sin(\lambda\pi)] - (1/\lambda)$

D) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} 2\lambda/(n^2 - \lambda^2) = -[\pi/\sin(\lambda\pi)] - (1/\lambda)$

Soit α un réel strictement supérieur à 1. On considère g la fonction réelle de la variable réelle définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = 1/(1+t^{\alpha})$

Question 32 :

A) La fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ car toute fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$ est intégrable sur cet intervalle

B) La fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ car g est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et équivalente à la fonction $1/t^{\alpha}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$

C) La fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ car toute fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$ ayant une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$ est intégrable sur $[0, +\infty[$

D) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est absolument convergente et la fonction g est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si α est supérieur ou égal à 2

Tournez la page S.V.P.

Dans la suite de cette partie, on pose

$$G(\alpha)=\int_0^1 g(t)dt \quad \text{et} \quad H(\alpha)=\int_0^{+\infty} g(t)dt \text{ lorsque ces intégrales convergent}$$

Question 33 : On a

A) pour tout α réel strictement supérieur à 1, $\int_1^{+\infty} g(t)dt = -\beta \int_0^1 x^{-\beta-1}/(1+x^{-\alpha\beta})dx$ en posant le changement de variable défini sur $]0,1[$ par le C^1difféomorphisme $t=x^{-\beta}$ avec $\beta>0$

B) pour tout α réel strictement supérieur à 1, $\int_1^{+\infty} g(t)dt = \beta \int_0^1 x^{-\beta-1}/(1+x^{-\alpha\beta})dx$ en posant le changement de variable défini sur $]0,1[$ par le C^1difféomorphisme $t=x^{-\beta}$ avec $\beta>0$

C) $H(\alpha) = G(\alpha) + (1/(\alpha-1))\, G(\alpha/(\alpha-1))$ pour tout α réel supérieur ou égal à 2

D) $H(\alpha) = G(\alpha) - (1/(\alpha-1))\, G(\alpha/(\alpha-1))$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

Question 34 : On établit que

A) $g(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} t^{(n+1)\alpha} g(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,,\,1]$ et n entier naturel

B) $g(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} t^{(n+1)\alpha} g(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,,\,1]$ et n entier naturel

C) $g(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n} t^{n\alpha} g(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,,\,1]$ et n entier naturel

D) $g(t) = \sum_{k=0}^{n} t^{k\alpha} - t^{(n+1)\alpha} g(t)$ pour tout t appartenant à $[0\,,\,1]$ et n entier naturel

Question 35 : Pour tout n entier naturel, on pose $K_n=\int_0^1 t^{(n+1)\gamma}/(1+t^{\gamma})dt$ avec γ réel strictement positif. La suite (K_n)

A) diverge

B) ne converge pas vers 0

C) converge vers 0 si et seulement si γ est strictement supérieur à 1

D) converge vers 0 pour tout γ strictement positif car $0\leq K_n \leq 1/(1+(n+1)\gamma)$

Pour tout n entier naturel, on pose pour tout t appartenant à [0 , 1] $k_n(t)= t^{(n+1)\gamma}/(1+ t^{\gamma})$ avec γ réel strictement positif.
On considère la suite (K_n) définie pour tout n entier naturel par $K_n= \int_0^1 k_n(t)dt$

Question 35 : La suite de fonctions (k_n)

A) converge simplement sur l'intervalle [0 , 1] vers la fonction nulle
B) converge simplement sur l'intervalle]0 , 1[vers la fonction nulle
C) converge simplement sur l'intervalle [0 , 1] vers la fonction k définie sur le segment [0 , 1] par $k(t)= 0$ si $0\leq t< 1$ et $k(1)=1/2$
D) converge simplement sur l'intervalle [0 , 1] si et seulement si γ est strictement supérieur à 1

Question 36 : Pour tout n entier naturel, k_n

A) est, pour tout γ strictement positif, intégrable sur l'intervalle]0 , 1[mais n'est pas intégrable sur le segment [0 , 1]
B) est intégrable sur le segment [0 , 1] si et seulement si γ est strictement supérieur à 1
C) est, pour tout γ strictement positif, dominée sur l'intervalle [0 , 1] par la fonction $1/(1+ t^{\gamma})$ qui est continue, positive et intégrable sur [0 , 1]
D) est dominée sur l'intervalle [0 , 1] par la fonction $t^{(n+1)\gamma}$ qui est continue, positive et intégrable sur [0 , +∞[pour tout γ strictement positif

Question 37 : La suite (K_n)

A) converge vers 0 car, la suite (k_n) vérifiant, pour tout n entier naturel et pour tout t appartenant à [0 , 1], l'hypothèse de domination $|k_n|\leq t^{(n+1)\gamma}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour établir que

$$\lim_{n\to+\infty} K_n = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} k_n(t)\; dt \text{ pour tout } \gamma \text{ strictement positif}$$

B) ne converge pas vers 0
C) converge vers 0 si et seulement si γ est strictement supérieur à 1
D) converge vers 0 pour tout γ strictement positif car $0\leq K_n \leq 1/(1+(n+1)\gamma)$

Tournez la page S.V.P.

Question 38 : On obtient

A) $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k/(1+k\alpha)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

B) $G(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k/(1+k\alpha)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

C) $G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/(1+k\alpha)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

D) $G(\alpha/(\alpha-1)) = (\alpha-1)\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k/((k+1)\alpha-1)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

Question 39 : On en déduit

A) $H(\alpha)= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k/(1+k\alpha) - \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k/(k\alpha-1)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

B) $H(\alpha)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/(1+k\alpha) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/(k\alpha-1)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

C) $H(\alpha)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/(1+k\alpha) - \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k/(k\alpha-1)$ uniquement pour α supérieur ou égal à 2

D) $H(\alpha)= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k/(1+k\alpha) - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k/(k\alpha-1)$ pour tout α réel strictement supérieur à 1

Question 40 : Pour tout α réel strictement supérieur à 1, on considère la série de terme général a_k défini pour tout k entier supérieur ou égal à 1 par $a_k = (-1)^{k+1}2/(k^2\alpha^2-1)$.

A) La série $\sum a_k$ est une série alternée convergente mais non absolument convergente

B) La série $\sum a_k$ est une série alternée absolument convergente car $|a_k|$ est équivalent à $2/k^2$ terme général d'une série convergente

C) pour tout α réel strictement supérieur à 1, $H(\alpha)= \pi/(\alpha \sin(\pi/\alpha))$ car $1/\alpha$ est un réel non entier

D) pour tout α réel strictement supérieur à 1, $H(\alpha)= [\pi/(\alpha \sin(\pi/\alpha))] - 1$ car $1/\alpha$ est un réel non entier