

Planche n° 1. Trigonométrie circulaire. Corrigé

n° 1

- 1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- 3) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
- 4) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
- 5) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
- 6) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- 7) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 8) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

n° 2

- 1) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
- 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
- 3) $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
- 4) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
- 5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
- 6) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

n° 3

- 1) $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
- 2) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
- 3) $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
- 4) $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 5) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$.
De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
- 6) $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 7) $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 8) $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 9) $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 10) $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 11)

$$\begin{aligned} \sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = -x + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{2k\pi}{3}) \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.

12)

$$12 \cos^2 x - 8 \sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6 \cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

n° 4

1) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.

3) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos x > \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2 \cos \frac{x}{2} + 1)(\cos \frac{x}{2} - 1) > 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right] \text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right] \text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

4) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.

5) Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

6) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2k\pi \leq \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leq x \leq 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi$$

n° 5

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \text{ et puisque } \cos \frac{\pi}{8} > 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

De même, puisque $\sin \frac{\pi}{8} > 0$, $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right)\right)}$ et

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

n° 6

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

n° 7

Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)}$.

- $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2 \cos a_1$
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} \\ &= 2 \cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_{n+1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geq 1, S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$.

Ensuite, pour $n \geq 1, \sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Im}(S_n) = 0$).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n.$$

n° 8

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0, \pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul $k, \frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \pi[$ et donc $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$.

De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2 \times \frac{a}{2^k}\right) = 2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right) \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(a) \sin\left(\frac{a}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right) \dots \sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right) \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}.$$

$$\forall a \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}.$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) > 0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\forall a \in]0, \pi[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

n° 9 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \cdot 2^{1 - 4 \cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4 \cos^2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4 \cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4 \cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4 \cos^2 x} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4 \cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x = 1 \text{ ou } 4 \cos^2 x = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right). \end{aligned}$$

n° 10

1) Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan \theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

Soit donc $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta}{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3 \theta$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \right), \tan(3\theta) = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}.$$

1) Soit $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1ère méthode. a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \text{ (car } \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)} \\ &\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$ vaut :

$$\Delta' = 16a^2 - (3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 3a^4 + 6a^2 + 3 = (\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\mathcal{S} = \left\{ a, \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}, \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2} \right\}.$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$ tel que $a = \tan \alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\setminus \left\{ -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right\}$ tel que $x = \tan \theta$ (à savoir $\alpha = \text{Arctan } a$ et $\theta = \text{arctan } x$). Comme $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha) \\ &\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan \alpha = a$, puis

$$x = \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2},$$

$$\text{et } x = \tan \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}.$$

n° 11

1) Pour $x \notin \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x) = \frac{\operatorname{Im}((e^{ix})^5)}{\operatorname{Re}((e^{ix})^5)} = \frac{5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x} = \frac{5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z} \right), \tan(5x) = \frac{5 \tan x - 10 \tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10 \tan^2 x + 5 \tan^4 x}.$$

2) $9^\circ, -27^\circ, -63^\circ$ et 81° vérifient $\tan(5 \times 9^\circ) = \tan(5 \times (-27^\circ)) = \tan(5 \times (-63^\circ)) = \tan(5 \times 81^\circ) = 1$. On résoud donc l'équation :

$$\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z} \right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $] -90^\circ, 90^\circ[$, sont $-63^\circ, -27^\circ, 9^\circ, 45^\circ$ et 81° . Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63^\circ), \tan(-27^\circ), \tan(9^\circ), \tan(45^\circ)$ et $\tan(81^\circ)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X - 10X^3 + X^5}{1 - 10X^2 + 5X^4} = 1$ qui s'écrit encore :

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = 0.$$

Le polynôme $X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1$ admet déjà $\tan(45^\circ) = 1$ pour racine et on a

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = (X - 1)(X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63^\circ), \tan(-27^\circ), \tan(9^\circ)$ et $\tan(81^\circ)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X - \tan(9^\circ))(X + \tan(27^\circ))(X + \tan(63^\circ))(X - \tan(81^\circ))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9^\circ) - \tan(27^\circ) - \tan(63^\circ) + \tan(81^\circ)$ et on a montré que :

$$\tan(9^\circ) - \tan(27^\circ) - \tan(63^\circ) + \tan(81^\circ) = 4.$$

n° 12

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$f(x)$ existe $\Leftrightarrow \tan x, \tan(2x), \tan(3x)$ et $\tan(4x)$ existent

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \text{ et } (4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow (x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}), (x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}), (x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}) \text{ et } (x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right\}. \end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{8}, \pi \right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$.

Sur $I = \left[0, \frac{\pi}{8} \right[$ ou $I = \left] \frac{7\pi}{8}, \pi \right]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I . Ensuite, dans l'expression de somme f , une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions.

En $\frac{\pi^-}{2}$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi^-}{2}$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi^+}{2}$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$. Finalement,

(E) admet exactement dix solutions dans $[0, \pi]$.

n° 13

1) D'après les formules d'EULER,

$$z + z^4 = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2 \cos \frac{2\pi}{5} = a.$$

De même,

$$z^2 + z^3 = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2 \cos \frac{4\pi}{5} = b.$$

2) Puisque $z \neq 1$ et $z^5 = e^{2i\pi} = 1$,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0.$$

3) $a + b = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$ et $ab = (z + z^4)(z^2 + z^3) = z^3 + z^4 + z^6 + z^7 = z + z^2 + z^3 + z^4 = -1$. Donc,

$$a + b = -1 \text{ et } ab = -1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2 + X - 1 = 0$ à savoir les nombres $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\frac{4\pi}{5} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on a $a > 0$ et $b < 0$. Finalement,

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

n° 14

1) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$.

2) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned} \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2 \cos(4x) + 8 \cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4 \cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^4 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) + 2 \sin(2x) + 3x)$.

3)

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2 \cos(4x) - 8 \cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4 \cos(2x) + 3) \end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^4 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x) - 2 \sin(2x) + 3x)$.

4) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{8}(x - \frac{1}{4}\sin(4x))$.

5)

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x \mapsto \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{32}\left(-\frac{1}{6}\sin(6x) + \frac{3}{2}\sin(4x) - \frac{15}{2}\sin(2x) + 10x\right)$.

6) $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ est $x \mapsto \frac{1}{7}\sin^7 x$.

7) $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2\sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x$.

8) $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

n° 15

1) Pour x réel, on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix} - 2e^{8ix} - 3e^{6ix} + 8e^{4ix} + 2e^{2ix} - 12 + 2e^{-2ix} + 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} - 2e^{-8ix} + e^{-10ix}) \\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6)\end{aligned}$$

(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix} , e^{-4ix} , ... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix} , e^{4ix} , ...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512} \left(\left[\frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 8x}{4} - \frac{\sin 6x}{2} + 2\sin 4x + \sin 2x \right]_{\pi/6}^{\pi/3} - 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left(\frac{1}{10} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} (0 - 0) + 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \pi \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3} - \pi \right) = \frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2) Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \\ &= \cos^4 x \sin x - 3\cos^6 x \sin x + 3\cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= -\frac{1}{5} \times \frac{1 - 9\sqrt{3}}{32} + \frac{3}{7} \times \frac{1 - 27\sqrt{3}}{128} - \frac{1}{3} \times \frac{1 - 81\sqrt{3}}{512} + \frac{1}{11} \times \frac{1 - 243\sqrt{3}}{2048} \\ &= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} (-14784(1 - 9\sqrt{3}) + 7920(1 - 27\sqrt{3}) - 1540(1 - 81\sqrt{3}) + 105(1 - 243\sqrt{3})) \\ &= \frac{1}{2\,365\,440} (-8\,299 + 18\,441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

n° 16

1) $\tan \frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}.$$

2) 1 ère solution. Pour tout réel x ,

$$\sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \text{Im}(e^{i(x - \frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x + \frac{2\pi}{3})}) = \text{Im}(e^{ix}(j^2 + 1 + j)) = 0.$$

3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4} - x$, $\frac{\pi}{4} + x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \quad (\text{pour } x \text{ vérifiant de plus } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \\ &= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(2x)} \\ &= \frac{2}{\cos(2x)} \quad (\text{ce qui reste vrai pour } x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

4) Pour $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

n° 17

1) • Pour tout réel x , $1 - 2k \cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$. De plus,

$$1 - 2k \cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2k \cos x + k^2 > 0.$$

• f_k est donc définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π -périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= \cos x(1 - 2k \cos x + k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \sin x(2k \sin x)(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(\cos x(1 - 2k \cos x + k^2) - k \sin^2 x) \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(-k \cos^2 x + (1 + k^2) \cos x - k) \\ &= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1)(k - \cos x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) = \frac{(k \cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k \cos x + k^2)^{3/2}}.$$

1er cas : $|k| < 1$ et $k \neq 0$. (si $k = 0$, $f_k(x) = \sin x$) Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1) < 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0	Arccos k	π
f'(x)	+	0	-
f	0	1	0

(car $f_k(\text{Arccos } k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}} = 1$).

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) > 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $k \cos x - 1$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
f'(x)	+	0	-
f	0	$\frac{1}{k}$	0

(car $f_k(\text{Arccos } \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+\frac{1}{k^2}}} = \frac{1}{k}$).

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) < 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $1 - k \cos x$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
f'(x)	+	0	-
f	0	$-\frac{1}{k}$	0

(car $f_k(\text{Arccos } \frac{1}{k}) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+\frac{1}{k^2}}} = -\frac{1}{k}$).

2) Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, posons $I_k = \int_0^\pi f_k(x) dx$.

Si $k = 0$, $I_k = \int_0^\pi \sin x dx = 2$. Sinon,

$$I_k = \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{2k \sin x}{2\sqrt{1-2k \cos x + k^2}} dx = \frac{1}{k} \left[\sqrt{1-2k \cos x + k^2} \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{k} (\sqrt{1+2k+k^2} - \sqrt{1-2k+k^2}) = \frac{1}{k} (|k+1| - |k-1|).$$

Plus précisément, si $k \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $I_k = \frac{1}{k} ((1+k) - (1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \frac{1}{k} ((1+k) - (k-1)) = \frac{2}{k}$, et enfin, si $k < -1$, $I_k = \frac{-2}{k}$. En résumé,

Si $k \in]-1, 1[$, $I_k = 2$ et si $k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, $I_k = \frac{2}{|k|}$.

n° 18

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n + 1$ et $S'_n = 0$.

2ème cas. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^n (\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x) \\ &= \left(\sin \frac{x}{2} - \sin \frac{-x}{2} \right) + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \dots + \left(\sin \frac{(2n-1)x}{2} - \sin \frac{(2n-3)x}{2} \right) \\ &\quad + \left(\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right) \\ &= \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2} \end{aligned}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \dots$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = n + 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n + 1 \quad \text{et} \quad S_n - S'_n = \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2} \left(n + 1 + \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right) \quad \text{et} \quad S'_n = \frac{1}{2} \left(n + 1 - \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right).$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \right) + i \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) \right) &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k} \\ &= (1 + e^{ix})^n = (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{nx}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{nx}{2} \right).$$

n° 19

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$$

$$\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow |e^{ia/2} e^{ib/2} (e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2})| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \cos \frac{a-b}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / b = a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ ou encore $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(a, a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \right), a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

n° 20

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} &= 2(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8}) = 2(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8}) \\ &= 2 \left((\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8})^2 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

n° 21

1)

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10} \right\}.$$

2) $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 3 - 2 \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (-4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0). \end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin \frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin \frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin \frac{13\pi}{10} = -\sin \frac{3\pi}{10}$),

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ensuite, $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{5}$, et donc

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Puis

$$\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

et de même

$$\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos \frac{3\pi}{10}$$