Planche n° 2. Trigonométrie circulaire réciproque. Trigonométrie hyperbolique

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (*IT)** Domaine de définition et calcul des fonctions suivantes : **1)** $x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$, **2)** $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$, **3)** $x \mapsto \cos(\operatorname{Arccos} x)$, **4)** $x \mapsto \operatorname{Arccos}(\cos x)$, **5)** $x \mapsto \tan(\operatorname{Arctan} x)$, **6)** $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\tan x)$.

n° 2 (*IT)**

1) Calculer $\operatorname{Arccos} x + \operatorname{Arcsin} x$ pour x élément de $[-1, 1]$.

2) Calculer $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}$ pour x réel non nul.

3) Calculer $\cos(\operatorname{Arctan} a)$ et $\sin(\operatorname{Arctan} a)$ pour a réel donné.

4) Calculer, pour a et b réels tels que $ab \neq 1$, $\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b$ en fonction de $\operatorname{Arctan} \frac{a+b}{1-ab}$ (on étudiera d'abord $\cos(\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b)$ et on distinguera les cas $ab < 1$, $ab > 1$ et $a > 0$, $ab > 1$ et $a < 0$).

n° 3 (*IT) Etablir pour ch, sh et th les formules d'addition, de duplication et de linéarisation.

n° 4 (*I)** Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \operatorname{Arcsin}\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\cos^2 x} \operatorname{Arccos}\sqrt{t}\, dt$.

n° 5 (**) Simplifier les expressions suivantes :

1) $f_1(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

2) $f_2(x) = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

3) $f_3(x) = \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

4) $f_4(x) = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2x^2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{x}{x+1} + \operatorname{Arctan}\dfrac{x-1}{x}$.

n° 6 (I)** Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

n° 7 (*I)** Calculer $u_n = \operatorname{Arctan}\frac{2}{1^2} + \operatorname{Arctan}\frac{2}{2^2} + ... + \operatorname{Arctan}\frac{2}{n^2}$ pour n entier naturel non nul donné puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. (Utiliser le n° 2.4))

n° 8 (*) Etudier $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x) - x$.

n° 9 (**) (Mines de DOUAI 1984) On considère la fonction numérique f telle que :

$$f(x) = (x^2 - 1)\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x-1},$$

et on appelle $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Quel est l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f ?
2) Exprimer, sur $\mathscr{D} \setminus \{0\}$, la dérivée de f sous la forme : $f'(x) = 2xg(x)$.
3) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 1 > 0$ et en déduire le tableau de variation de g.
4) Dresser le tableau de variation de f.

n° 10 (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{sh}(2+x) + \operatorname{sh}(2+2x) + ... + \operatorname{sh}(2+100x) = 0$.

n° 11 (I)**

1) Montrer que pour tout réel x non nul, on a : $\operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$.

2) En déduire la valeur de $u_n = 2^0 \operatorname{th}(2^0 x) + 2^1 \operatorname{th}(2^1 x) + ... + 2^{n-1} \operatorname{th}(2^{n-1} x)$ pour n entier naturel non nul et x réel non nul donnés puis calculer la limite de (u_n).

n° 12 (**) Simplifier les expressions suivantes

1) $\sin(2\operatorname{Arcsin} x)$ **2)** $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$ **3)** $\sin^2\left(\dfrac{\operatorname{Arccos} x}{2}\right)$ **4)** $\ln(\sqrt{x^2+1}+x)+\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

5) $\operatorname{argsh}\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)$ **6)** $\operatorname{argch}(2x^2-1)$ **7)** $\operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1}}\right)$ **8)** $\dfrac{\operatorname{ch}(\ln x)+\operatorname{sh}(\ln x)}{x}$

n° 13 (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\operatorname{ch} x = 2$ **2)** $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{2})$ **3)** $2\operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin}(2x\sqrt{1-x^2})$

