

Planche n° 3. Fonctions usuelles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (**I)

- 1) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que si f est paire, f' est impaire et si f est impaire, f' est paire.
- 2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . $f^{(n)}$ désignant la dérivée n -ième de f , montrer que si f est paire, $f^{(n)}$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
- 3) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de f ?
- 4) Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition « f est paire (ou impaire) » par la condition « f est T -périodique ».

n° 2 (**)

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

n° 3 (**I)

- 1) Etudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
- 2) Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

n° 4

Résoudre dans \mathbb{R} les équations ou inéquations suivantes :

- 1) (**)
 - 2) (*)
 - 3) (**)
 - 4) (**)
 - 5) (**)
- $$\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2$$
- $$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$$
- $$2 \operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth} \frac{7}{9}$$
- $$\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$$
- $$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$$

n° 5 (**)

Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

n° 6

Construire le graphe des fonctions suivantes :

- 1) (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
- 2) (**) $f_2(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
- 3) (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
- 4) (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
- 5) (***) $f_5(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).
- 6) (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6))$.