Planche n° 3. Fonctions usuelles. Corrigé

n° 1

1) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est paire, alors, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

et donc f' est impaire. De même, si f est impaire, pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$, et par dérivation on obtient pour tout réel x, $f'(-x) = f'(x)$. f' est donc paire.

$$\boxed{(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire) et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})}$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f paire. Par suite, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que $f^{(n)}$ a la parité de n, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ est une fonction paire quand n est un entier pair et est une fonction impaire quand n est un entier impair.

De même, si f est impaire et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.

3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et F une primitive de f. Montrons que F est paire.

Pour x réel, posons $g(x) = F(x) - F(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout réel x, $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$. Ainsi, g est la fonction nulle et donc, pour tout réel x, $F(x) = F(-x)$. On a montré que F est paire.

Par contre, si f est paire, F n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction $f\ :\ x \mapsto 1$ est paire, mais $F\ :\ x \mapsto x + 1$ est une primitive de f qui n'est pas impaire.

4) On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$, que les dérivées successives d'une fonction T-périodique sont T-périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel x, $f(x) = \cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, f est π-périodique, mais la fonction $F\ :\ x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin(2x)}{4}$, qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, n'est pas π-périodique ni même périodique tout court.

n° 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$.

f est définie sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier, pour $n \geq 3$,

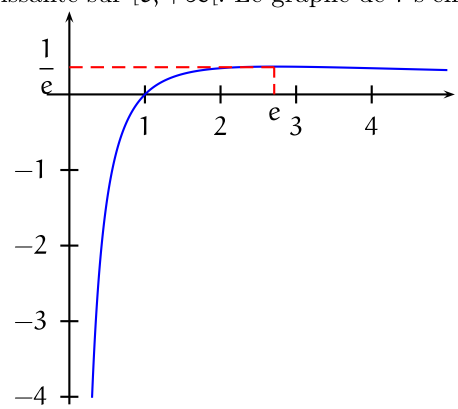
$$u_n = f(n) \leq f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$. Enfin, $\sqrt{2} = 1,41... < 1,44.. = \sqrt[3]{3}$ (on peut aussi constater que $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$). Finalement,

$$\boxed{\text{Max}\left\{\sqrt[n]{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} = \sqrt[3]{3} = 1,44...}$$

n° 3

1) Pour $x > 0$, posons $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$. On a alors

$$a^b = b^a \Leftrightarrow \ln(a^b) = \ln(b^a) \Leftrightarrow b \ln a = a \ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Si $a \geq 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, on a alors $f(a) > f(b)$ et en particulier, $f(a) \neq f(b)$. a n'est donc pas solution.

$a = 1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b = b^a \Rightarrow 1^b = b^1 \Rightarrow b = 1 = a$ ce qui est exclu.

Donc, nécessairement $a = 2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b) = f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e, +\infty[$, l'équation $f(b) = f(2)$ a au plus une solution dans $[e, +\infty[$. Enfin, comme $2^4 = 16 = 4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple (a, b) d'entiers naturels non nuls tel que $a < b$ et $a^b = b^a$, à savoir $(2, 4)$.

n° 4

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leq \ln 2 &\Leftrightarrow \ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq \ln 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{2x+1}\right| \leq 2 \text{ et } x+1 \neq 0 \\
&\Leftrightarrow -2 \leq \frac{x+1}{2x+1} \leq 2 \text{ et } x \neq -1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2x+1} + 2 \geq 0 \text{ et } \frac{x+1}{2x+1} - 2 \leq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \frac{5x+3}{2x+1} \geq 0 \text{ et } \frac{-3x-1}{2x+1} \leq 0 \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow \left(x \in \left]-\infty, -\frac{3}{5}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) \text{ et } \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[\right) \text{ et } x \neq -1 \\
&\Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup \left]-1, -\frac{3}{5}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

2) Pour $x > 0$

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln x = x \ln \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln x (\sqrt{x} - \frac{x}{2}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ln x \times \sqrt{x}(2 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4.
\end{aligned}$$

3) $\operatorname{argch} 3 = \ln(3 + \sqrt{3^2 - 1}) = \ln(3 + \sqrt{8})$ et $\operatorname{argth} \dfrac{7}{9} = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1 + \frac{7}{9}}{1 - \frac{7}{9}} \right) = \ln \sqrt{8}$. Donc, $\operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth} \dfrac{7}{9} = \ln \left(1 + \dfrac{3}{\sqrt{8}} \right)$.

Par suite,

$$2\operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.$$

4) Pour $x \in]0,+\infty[\setminus \left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1\right\}$,

$$\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x} + 2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)} + 3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10)) + 2\ln x(\ln x + 2\ln(10)) + 3\ln x(\ln x + \ln(10))}{\ln x(\ln x + \ln(10))(\ln x + 2\ln(10))} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\ln^2 x + 10\ln(10) \times \ln x + 2\ln^2(10) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \in \left\{\frac{-5\ln(10) + \sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10) - \sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans $\left\{\frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1\right\}$, $\mathscr{S} = \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

5) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \Leftrightarrow 3 \times 2^{2x-1} = 4 \times 3^{x-\frac{1}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)\ln 3$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

n° 5 Pour $x > 0$, $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x \ln x}$. Par suite,

$$\forall x > 0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x)).$$

Or, $x^2 - x^x = -x^x(1 - x^{2-x}) = -e^{x\ln x}(1 - e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1 - e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis $x^2 - x^x$ tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2 - x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x))$ tend vers 0.

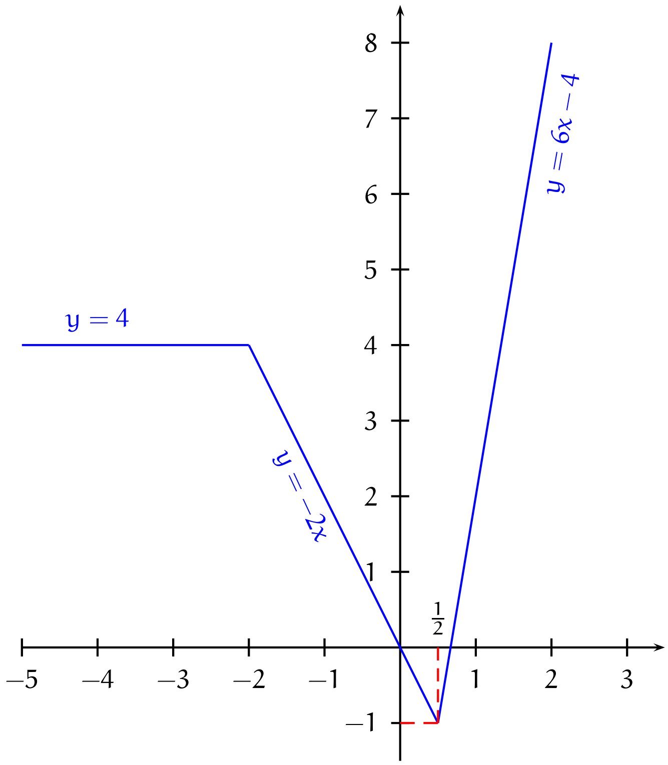
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.}$$

n° 6 On notera $\mathscr{C}_i$ le graphe de f_i.

1) f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$ $\quad$ -2	-2 $\quad$ $1/2$	$1/2$ $\quad$ $+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$

On en déduit $\mathscr{C}_1$.



2) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch} x \geq 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x) \geq 0$. f_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire.

Puisque la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$.

f_2 est paire et donc f_2' est impaire. Par suite, $f_2'(0) = 0$ et $\mathcal{C}_2$ admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f_2(0)) = (0, 0)$.

Etude en $+\infty$. Pour $x \geq 0$,

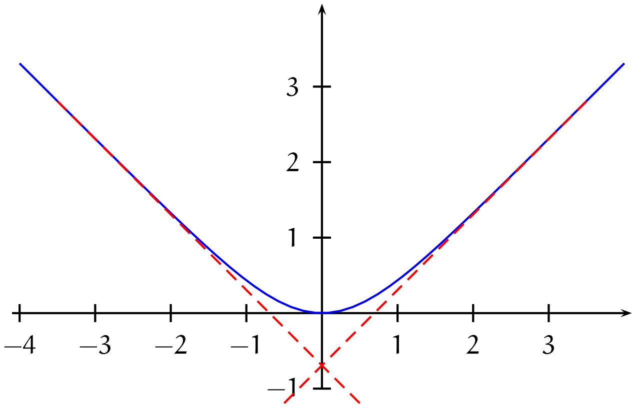
$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à $\mathscr{C}_2$ en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy), la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_2$ en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x,

$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, $\mathscr{C}_2$ est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$.

On en déduit $\mathscr{C}_2$.



3) f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Etude en $-\infty$. Soit $x\leq -1$.

$$f_3(x)=x+\sqrt{x^2-1}=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x-\sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f_3(x)=0$.

Etude en $+\infty$. Immédiatement, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_3(x)=+\infty$. Ensuite, pour $x\geq 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x)-2x=-x+\sqrt{x^2-1}=\frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}}=-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_3(x)-2x)=0$ et donc que la droite (D) d'équation $y=2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_3$ en $+\infty$.

Etude en 1. Pour $x>1$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=\frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1}=1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x\in]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=\frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)}=1-\sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim\limits_{x\to1,\ x>1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to1,\ x<1}\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1}=-\infty$. On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que $\mathscr{C}_3$ admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de $\mathscr{C}_3$ d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en -1.

Etude des variations de f_3. Pour $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x>1$, on a $x+\sqrt{x^2-1}>0$ et donc, $f_3'(x)>0$. Si $x<-1$, on a

$$\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=|x|=-x,$$

et donc, $x+\sqrt{x^2-1}<0$ puis $f_3'(x)<0$. Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

Pour $x\in]-1,1[$, $f_3(x)=x+\sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x\in]-1,0]$, on a clairement $f_3'(x)>0$. Si $x\in[0,1[$, par stricte croissance de la fonction $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

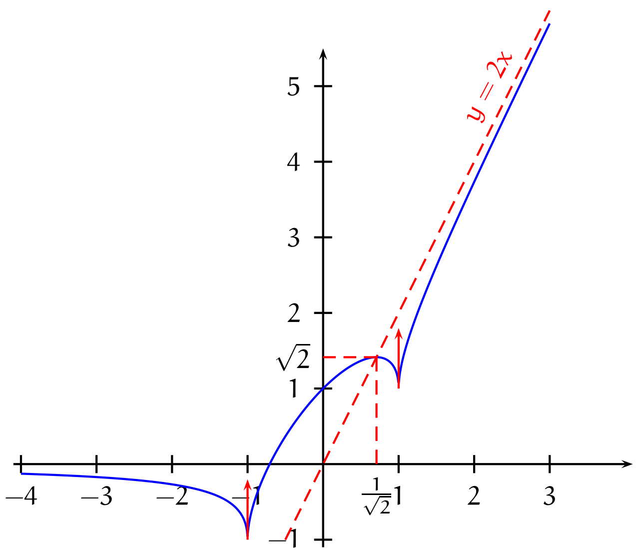
$$\text{sgn}(f_3'(x))=\text{sgn}(\sqrt{-x^2+1}-x)=\text{sgn}((-x^2+1)-x^2)=\text{sgn}(1-2x^2)=\text{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2}))=\text{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}}-x).$$

Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty,-1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1,+\infty[$.

f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1,+\infty[$.

On en déduit $\mathscr{C}_3$.



4) f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-périodique et paire. On étudie donc f_4 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Etude des variations de f_4. Pour $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ et donc,

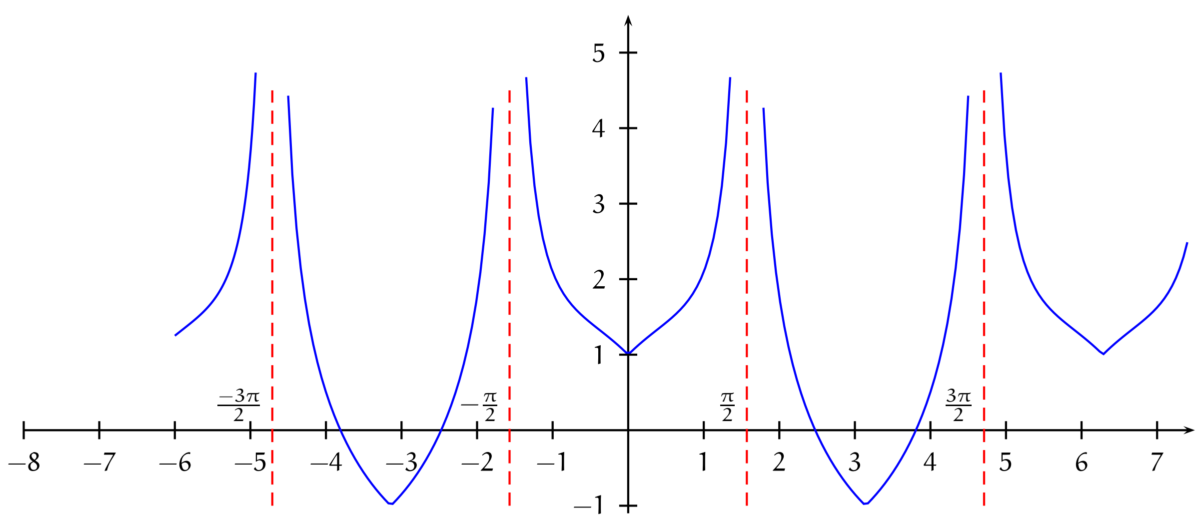
$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geq 1 - 1 = 0,$$

avec égalité si et seulement si $\sin x = \cos^2 x = 1$ ce qui est impossible. Donc, f_4' est strictement positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et f_4 est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ et f_4 est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

On a immédiatement $\displaystyle\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$.

On en déduit $\mathscr{C}_4$.



5) Soit $x > 0$. x n'est pas nul donc $\dfrac{1}{x}$ existe puis $1 + \dfrac{1}{x} > 0$ et $f_6(x)$ existe.

Etude en 0. Pour $x > 0$, $x\ln(1 + \dfrac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1+x)$. Par suite, $x\ln(1 + \dfrac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x) = \exp(x\ln(1 + \dfrac{1}{x}))$ tend vers 1.

Posons encore $f_5(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_5 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1+\frac{1}{x})) - 1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1+\frac{1}{x})\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp(x\ln\left(1+\frac{1}{x})\right) - 1}{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi, f_5 n'est pas dérivable en 0 mais $\mathscr{C}_5$ admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_5(0)) = (0, 1)$.

Etude en $+\infty$. Pour $x > 0$, $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = e.$$

Etude des variations de f_5. Pour $x > 0$, $f_5(x) > 0$ puis $\ln(f_5(x)) = x\ln(1+\dfrac{1}{x})$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f_5'(x) = f_5(x)\ln(f_5)'(x) = f_5(x)\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1+\frac{1}{x}}\right) = f_5(x)g(x),$$

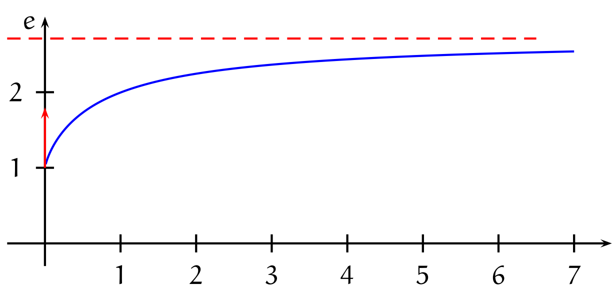
où $g(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, f_5' est du signe de g.

Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0, +\infty[$. Il en est de même de f_5'. f_5 est strictement croissante sur $]0, +\infty($.

On en déduit $\mathscr{C}_5$.



6) Domaine de définition de f_6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_6(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } 1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \frac{\ln(x^2 - 5x + 6)}{\ln\frac{1}{2}} < 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ et } \ln(x^2 - 5x + 6) > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{2} > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty[= \mathscr{D}_f.$$

Variations de f_6. La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2} > \frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2} < \frac{5}{2}$, la fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme néperien est strictement croissante. La fonction $x \mapsto 1 + \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Axe de symétrie Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in \mathscr{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2} - x \in \mathscr{D}_f$ et de plus, $\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2} - x\right) + 6 = x^2 - 5x + 6$. Par suite,

$$\forall x \in \mathscr{D}_{f_6},\ f_6\left(\frac{5}{2} - x\right) = f_6(x).$$

$\mathscr{C}_6$ admet donc la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.

Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit $\mathscr{C}_6$.