

Planche n° 4. Logique. Ensembles. Applications.

Réurrences

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (IT)** Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

- 1) (f étant une application du plan dans lui-même)
 - a) f est l'identité du plan.
 - b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
- 2) (f étant une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R})
 - a) f est l'application nulle.
 - b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
 - c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
- 3) ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite réelle)
 - a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.
 - b) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
 - c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

n° 2 (*IT) Donner la négation des phrases suivantes

- 1) $x \geq 3$
- 2) $0 < x \leq 2$.

n° 3 (IT)** Les phrases suivantes sont-elles équivalentes ?

- 1) « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».
- 2) « $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ » et « $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$ ».

Donner un exemple de fonctions f et g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , toutes deux non nulles et dont le produit est nul.

n° 4 (IT)** Dans chacun des cas suivants, déterminer $f(I)$ puis vérifier que f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ puis préciser f^{-1} :

- 1) $f(x) = x^2 - 4x + 3, I =] - \infty, 2]$.
- 2) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, I =] - 2, +\infty[$.
- 3) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 1, I = \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$.
- 4) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, I = \mathbb{R}$.

n° 5 (IT)** Pour $z \neq i$, on pose $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que f réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$. Préciser f^{-1} .

n° 6 (T)** Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. Trouver une démonstration directe.

n° 7 (*)**

- 1) Montrer par récurrence que, pour tout naturel non nul n , $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. En calculant la différence $(k+1)^2 - k^2$, trouver une démonstration directe de ce résultat.
- 2) Calculer de même les sommes $\sum_{k=1}^n k^2$, $\sum_{k=1}^n k^3$ et $\sum_{k=1}^n k^4$ (et mémoriser les résultats).
- 3) On pose $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$. Déterminer une relation de récurrence permettant de calculer les S_p de proche en proche.

n° 8 (*IT) Montrer que : $(g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective})$ et $(g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective})$.

n° 9 (T)** Parmi $f \circ g \circ h$, $g \circ h \circ f$ et $h \circ f \circ g$ deux sont injectives et une est surjective. Montrer que f , g et h sont bijectives.

n° 10 (T)** A et B sont des parties d'un ensemble E . Montrer que :

- 1) $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.
- 2) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 3) $A \Delta B = B \Delta A$.
- 4) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- 5) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- 6) $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$.

n° 11 (IT)** Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par un ensemble I et $(B_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble F indexée par un ensemble I . Soit f une application de E vers F . Comparer du point de vue de l'inclusion les parties suivantes :

- 1) $f(\bigcup_{i \in I} A_i)$ et $\bigcup_{i \in I} f(A_i)$ (recommencer par $f(A \cup B)$ si on n'a pas les idées claires).
- 2) $f(\bigcap_{i \in I} A_i)$ et $\bigcap_{i \in I} f(A_i)$.
- 3) $f(E \setminus A_i)$ et $F \setminus f(A_i)$.
- 4) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i)$ et $\bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- 5) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$ et $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.
- 6) $f^{-1}(F \setminus B_i)$ et $E \setminus f^{-1}(B_i)$.

n° 12 (IT)** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes (f est une application d'un ensemble E dans lui-même) :

- 1) f est injective.
- 2) $\forall X \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(X)) = X$.
- 3) $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$.
- 4) $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, X \cap Y = \emptyset \Rightarrow f(X) \cap f(Y) = \emptyset$.
- 5) $\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, Y \subset X \Rightarrow f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$.

n° 13 (**)** Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que, pour $n \geq 2$, H_n n'est jamais un entier (indication : montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair en distinguant les cas où n est pair et n est impair).

n° 14 (I)** Théorème de CANTOR :

- 1) Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
- 2) En considérant la partie $A = \{x \in E / x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas de bijection f de E sur $\mathcal{P}(E)$.

n° 15 (**)** (Une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N})

Soit $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que f est une bijection. Préciser, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, le couple

$$(x, y) \mapsto y + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$$

(x, y) dont il est l'image.