Planche n° 4. Logique. Ensembles. Applications. Récurrence. Corrigé

n° 1

1) a) ($f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) = M$) et ($f \neq \mathrm{Id}_{\mathscr{P}} \Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) \neq M$).
b) (f a au moins un point fixe $\Leftrightarrow \exists M \in \mathscr{P}/\ f(M) = M$) et ($f$ n'a pas de point fixe $\Leftrightarrow \forall M \in \mathscr{P},\ f(M) \neq M$).

Constatez que les phrases $f(M) = M$ ou $f(M) \neq M$ **n'ont aucun sens** si elles ne sont pas accompagnées de quantificateurs.

2) a) ($f = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) et ($f \neq 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).
b) (L'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution si et seulement si $\exists x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$).

c) (L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution si et seulement si $\exists! x \in \mathbb{R}/\ f(x) = 0$) et (l'équation $f(x) = 0$ n'a pas exactement une solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}/\ f(x) \neq 0$ ou $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2/\ (x \neq x'$ et $f(x) = f(x') = 0)$).

3) a) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}/\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non bornée $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}/\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > M$).
b) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geq u_n$) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non croissante $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n$).
c) ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monotone $\Leftrightarrow$ ($\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \geq u_n$) ou ($\forall n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} \leq u_n$)) et ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non monotone $\Leftrightarrow$ (($\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} < u_n$) et ($\exists n \in \mathbb{N}/\ u_{n+1} > u_n$))).

n° 2 Le contraire de $x \geq 3$ est $x < 3$. Le contraire de $0 < x \leq 2$ est (($x \leq 0$) ou $x > 2$).

n° 3

1) Oui. Dans les deux cas, chaque fois que l'on se donne un réel x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont tous deux nuls.
2) Non. La deuxième affirmation implique la première mais la première n'implique pas la deuxième. La première phrase est la traduction avec des quantificateurs de l'égalité $fg = 0$. La deuxième phrase est la traduction avec quantificateurs de ($f = 0$ ou $g = 0$).

Voici un exemple de fonctions f et g toutes deux non nulles dont le produit est nul.
Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{array}\right. \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si } x > 0 \\ x \text{ si } x \leq 0 \end{array}\right. \end{array}$. Pour chaque valeur de x, on a soit $f(x) = 0$ (quand $x \leq 0$), soit $g(x) = 0$ (quand $x \geq 0$). On a donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ (f(x) = 0$ ou $g(x) = 0)$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)g(x) = 0$ ou enfin, $fg = 0$. Cependant, $f(1) = 1 \neq 0$ et donc $f \neq 0$, et $g(-1) = -1 \neq 0$ et donc $g \neq 0$. Ainsi, on n'a pas ($f = 0$ ou $g = 0$) ou encore, on n'a pas (($\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$) ou ($\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 0$)).

n° 4

1) f est dérivable sur $I =]-\infty, 2]$, et pour $x \in]-\infty, 2[$, $f'(x) = 2x - 4 < 0$. f est donc continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 2]$.
Par suite, f réalise une bijection de $]-\infty, 2]$ sur $f(]-\infty, 2]) = [f(2), \lim\limits_{-\infty} f[= [-1, +\infty[= J$. On note g l'application de I dans J qui, à x associe $x^2 - 4x + 3 (= f(x))$. g est bijective et admet donc une réciproque. Déterminons g^{-1}.
Soit $y \in [-1, +\infty[$ et $x \in]-\infty, 2]$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - y = 0.$$

Or, $\Delta' = 4 - (3 - y) = y + 1 \geq 0$. Donc, $x = 2 + \sqrt{y+1}$ ou $x = 2 - \sqrt{y+1}$. Enfin, $x \in]-\infty, 2]$ et donc, $x = 2 - \sqrt{y+1}$.
En résumé,

$$\forall x \in]-\infty, 2],\ \forall y \in [-1, +\infty[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{y+1}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1, +\infty[,\ g^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+1}.}$$

2) On vérifie facilement que f réalise une bijection de $]-2, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$, notée g.
Soient alors $x \in]-2, +\infty[$ et $y \in]-\infty, 2[$.

$$y = g(x) \Leftrightarrow y = \frac{2x-1}{x+2} \Leftrightarrow x(-y+2) = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

(on a ainsi trouvé au plus une valeur pour x à savoir $x = \dfrac{2y+1}{-y+2}$, mais il n'est pas nécessaire de vérifier que cette expression est bien définie et élément de $]-2,+\infty[$ car on sait à l'avance que y admet au moins un antécédent dans $]-2,+\infty[$, et c'est donc nécessairement le bon). En résumé,

$$\forall x \in]-2,+\infty[,\ \forall y \in]-\infty,2[,\ y = g(x) \Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{-y+2}.$$

On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in]-\infty,2[,\ g^{-1}(x) = \frac{2x+1}{-x+2}}.$$

3) f est continue et strictement croissante sur $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$.

f est donc bijective de $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ sur $f\left(\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[\right) = \left[f\left(-\dfrac{3}{2}\right), \lim\limits_{+\infty} f\right[= [-1,+\infty[$. Notons encore f l'application de $\left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$ dans $[-1,+\infty[$ qui à x associe $\sqrt{2x+3}-1$. Soient alors $x \in [-\dfrac{3}{2},+\infty[$ et $y \in [-1,+\infty[$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}-1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-3+(y+1)^2) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2}+y-1.$$

En résumé, $\forall x \in \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$, $\forall y \in [-1,+\infty[$, $y = g(x) \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2}{2}+y-1$. On vient de trouver g^{-1} :

$$\boxed{\forall x \in [-1,+\infty[,\ g^{-1}(x) = \frac{x^2}{2}+x-1.}$$

4) f est définie sur $\mathbb{R}$, impaire.

Pour $x \in [0,+\infty[$, $0 \leq f(x) = \dfrac{x}{1+x} < \dfrac{1+x}{1+x} = 1$. Donc, $f([0,+\infty[) \subset [0,1[$.

Par parité, $f(]-\infty,0]) \subset]-1,0]$ et même $f(]-\infty,0[) \subset]-1,0[$ car l'image par f d'un réel strictement négatif est un réel strictement négatif.

Finalement, $f(\mathbb{R}) \subset]-1,1[$.

Vérifions alors que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Soit $y \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $[0,+\infty[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq 1$, et positif, car $y \in [0,1[$. On a montré que :

$$\forall y \in [0,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x)\ (\text{à savoir } x = \frac{y}{1-y}).$$

Soit $y \in]-1,0[$ et $x \in \mathbb{R}$. L'égalité $f(x) = y$ impose à x d'être dans $]-\infty,0[$. Mais alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}.$$

Le réel x obtenu est bien défini, car $y \neq -1$, et strictement négatif, car $y \in]-1,0[$. On a montré que :

$$\forall y \in]-1,0[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x)\ (\text{à savoir } x = \frac{y}{1+y}).$$

Finalement,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \exists! x \in \mathbb{R}/\ y = f(x),$$

ce qui montre que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$. De plus, pour $y \in]-1,1[$ donné, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-y}$ si $y \geq 0$ et $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+y}$ si $y < 0$. Dans tous les cas, on a $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$.

En notant encore f l'application de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ qui à x associe $\dfrac{x}{1+|x|}$, on a donc

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}.}$$

n° 5

1) Montrons que la restriction de f à D, notée g, est bien une application de D dans P.
Soit $z \in D$. On a $|z| < 1$ et en particulier $z \neq i$. Donc, $f(z)$ existe. De plus,

$$\mathrm{Re}(f(z)) = \frac{1}{2}(f(z) + \overline{f(z)}) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2z\overline{z}-2}{(z-i)(\overline{z-i})} = \frac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0.$$

Donc, $f(z)$ est élément de P. g est donc une application de D dans P.

2) Montrons que g est injective.
Soit $(z, z') \in D^2$.

$$g(z) = g(z') \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \frac{z'+i}{z'-i} \Rightarrow iz' - iz = iz - iz' \Rightarrow 2i(z'-z) = 0 \Rightarrow z = z'.$$

3) Montrons que g est surjective.
Soient $z \in D$ et $Z \in P$.

$$g(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} = Z \Leftrightarrow z = \frac{i(Z+1)}{Z-1} \text{ (car } Z \neq 1,$$

(ce qui montre que Z admet au plus un antécédent dans D, à savoir $z = \dfrac{i(Z+1)}{Z-1}$ (mais on le sait déjà car g est injective). Il reste cependant à vérifier que $\dfrac{i(Z+1)}{Z-1}$ est effectivement dans D).
Réciproquement, puisque $\mathrm{Re}(Z) < 0$,

$$\left|\frac{i(Z+1)}{Z-1}\right| = \frac{|Z+1|}{|Z-1|} < 1$$

(Z étant strictement plus proche de -1 que de 1) et $z \in D$. Finalement g est une bijection de D sur P, et :

$$\boxed{\forall z \in P,\ g^{-1}(z) = \frac{i(z+1)}{z-1}.}$$

n° 6 Montrons par récurrence que $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

• Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{6} = \frac{1 \times (1+3)}{4 \times (1+1)(1+2)}$ et la formule proposée est vraie pour $n = 1$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ et montrons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}
\end{aligned}$$

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.}$$

Démonstration directe. Pour $k \geq 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right),$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)}) = \frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)})\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n^2+3n}{4(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

n° 7

1) Montrons par récurrence que : $\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$.

Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

On peut donner plusieurs démonstrations directes.

1ère demonstration. Pour $k \geq 1$, $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ et donc $\sum_{k=1}^{n}((k+1)^2 - k^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ce qui s'écrit $(n+1)^2 - 1 = 2\sum_{k=1}^{n} k + n$ ou encore $2\sum_{k=1}^{n} k = n^2 + n$ ou enfin $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2ème demonstration. On écrit

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n & = & S\\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 & = & S \end{array}$$

et en additionnant (verticalement), on obtient $2S = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$ d'où le résultat. La même démonstration s'écrit avec le symbole sigma :

$$2S = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) = n(n+1).$$

3ème demonstration. On compte le nombre de points d'un rectangle ayant n points de large et $n+1$ points de long. Il y en a $n(n+1)$. Ce rectangle se décompose en deux triangles isocèles contenant chacun $1+2+...+n$ points. D'où le résultat.

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

$$\begin{array}{ccccccccc}
* & & * & * & \dots & & & \dots & * \\
* & * & & \ddots & & & & & \vdots \\
* & * & * & & & & & & \\
\vdots & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & * & * & * \\
\vdots & & & & & \ddots & & * & * \\
* & \dots & & & \dots & * & * & & *
\end{array}$$

4ème démonstration. Dans le triangle de Pascal, on sait que pour n et p entiers naturels donnés,

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Donc, pour $n \geq 2$ (le résultat est clair pour $n = 1$),

$$1 + 2 + ... + n = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_k^1 = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(C_{k+1}^2 - C_k^2\right) = 1 + (C_{n+1}^2 - 1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2) Pour $k \geq 1$, $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$:

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 1.$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 1 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n\right) = \frac{1}{6}(2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)) = \frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n),$$

et donc

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$, on a

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^4 - k^4) = (n+1)^4 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{4}((n+1)^4 - 1 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n) = \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)(n(2n+1) + 2n + 1) \\
&= \frac{1}{4}((n+1)^4 - (n+1)^2(2n+1)) = \frac{(n+1)^2((n+1)^2 - (2n+1))}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.}$$

Pour $k \geq 1$, $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$. Donc, pour $n \geq 1$,

$$5\sum_{k=1}^{n} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 1.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{1}{5}((n+1)^5 - 1 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - n)\\ &= \frac{1}{30}(6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1))\\ &= \frac{1}{30}(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{c}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{array}}$$

3) Soit p un entier naturel. Pour $k \geq 1$,

$$(k+1)^{p+1} - k^{p+1} = \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j.$$

Donc, pour $n \geq 1$:

$$\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j}(\sum_{k=1}^{n} k^j) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} k^j) = \sum_{k=1}^{n}((k+1)^{p+1} - k^{p+1}) = (n+1)^{p+1} - 1.$$

D'où la formule de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=0}^{p} C_{p+1}^{j} S_j = (n+1)^{p+1} - 1.}$$

n° 8

1) Soit $(x_1, x_2) \in E^2$.

$$\begin{aligned}f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \text{ (car } g \text{ est une application)}\\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ (car } g \circ f \text{ est injective).}\end{aligned}$$

On a montré que $\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, et donc f est injective.

2) Soit $y \in H$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe un élément x dans E tel que $g(f(x)) = y$. En posant $z = f(x) \in G$, on a trouvé z dans G tel que $g(z) = y$. On a montré : $\forall y \in H,\ \exists z \in G/\ g(z) = y$, et donc g est surjective.

n° 9 On peut supposer sans perte de généralité que $f \circ g \circ h$ et $g \circ h \circ f$ sont injectives et que $h \circ f \circ g$ est surjective. D'après le n° 8, puisque $f \circ g \circ h = (f \circ g) \circ h$ est injective, h est injective et puisque $h \circ f \circ g = h \circ (f \circ g)$ est surjective, h est surjective. Déjà h est bijective. Mais alors, h^{-1} est surjective et donc $f \circ g = h^{-1} \circ (h \circ f \circ g)$ est surjective en tant que composée de surjections. Puis h^{-1} est injective et donc $f \circ g = (f \circ g \circ h) \circ h^{-1}$ est injective. $f \circ g$ est donc bijective. $f \circ g$ est surjective donc f est surjective. $g \circ h \circ f$ est injective donc f est injective. Donc f est bijective. Enfin $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ est bijective en tant que composée de bijections.

n° 10

1) Si $A = B = \varnothing$ alors $A\Delta B = \varnothing = A \cap B$.
Si $A\Delta B = A \cap B$, supposons par exemple $A \neq \varnothing$.

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

Soit $x \in A$. Si $x \in B$, $x \in A \cap B = A\Delta B$ ce qui est absurde et si $x \notin B$, $x \in A\Delta B = A \cap B$ ce qui est absurde. Donc $A = B = \varnothing$. Finalement, $A\Delta B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \varnothing$.

2) Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) &= ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap B) \cup (B \cap C)) \cap (C \cup A) \\ &= ((A \cap C) \cup B) \cap (C \cup A) \text{ (car } B \cap B = B \text{ et } A \cap B \subset B \text{ et } B \cap C \subset B) \\ &= ((A \cap C) \cap C) \cup ((A \cap C) \cap A) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap C) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (B \cap A) \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)\end{aligned}$$

3) $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B\Delta A$.

4)

$$\begin{aligned}x \in (A\Delta B)\Delta C &\Leftrightarrow x \text{ est dans } A\Delta B \text{ ou dans } C \text{ mais pas dans les deux} \\ &\Leftrightarrow ((x \in A \text{ et } x \notin B \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \text{ et } x \notin C) \text{ ou } (x \in C \text{ et } x \notin A\Delta B) \\ &\Leftrightarrow x \text{ est dans une et une seule des trois parties ou dans les trois.}\end{aligned}$$

Par symétrie des rôles de A, B et C, $A\Delta(B\Delta C)$ est également l'ensemble des éléments qui sont dans une et une seule des trois parties A, B ou C ou dans les trois. Donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$. Ces deux ensembles peuvent donc se noter une bonne fois pour toutes $A\Delta B\Delta C$.

5) $A = B \Rightarrow A \setminus B = \varnothing$ et $B \setminus A = \varnothing \Rightarrow A\Delta B = \varnothing$.
$A \neq B \Rightarrow \exists x \in E/ \ ((x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \notin A \text{ et } x \in B)) \Rightarrow \exists x \in E/ \ x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B \Rightarrow A\Delta B \neq \varnothing$.

6)
$\Leftarrow$ Immédiat.
$\Rightarrow$ Soit x un élément de A.
Si $x \notin C$ alors $x \in A\Delta C = B\Delta C$ et donc $x \in B$ car $x \notin C$.
Si $x \in C$ alors $x \notin A\Delta C = B\Delta C$. Puis $x \notin B\Delta C$ et $x \in C$ et donc $x \in B$. Dans tous les cas, x est dans B. Tout élément de A est dans B et donc $A \subset B$. En échangeant les rôles de A et B, on a aussi $B \subset A$ et finalement $A = B$.

n° 11

1) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}x \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y \in \bigcup_{i \in I} A_i / \ x = f(y) \Leftrightarrow \exists i \in I, \ \exists y \in A_i / \ x = f(y) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I / \ x \in f(A_i) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).}$$

2) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}x \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\Leftrightarrow \exists y \in \bigcap_{i \in I} A_i / \ x = f(y) \Leftrightarrow \exists y \in E / \ \forall i \in I, \ y \in A_i \text{ et } x = f(y) \\ &\Rightarrow \forall i \in I / \ \exists y \in A_i / \ x = f(y) \Leftrightarrow \forall i \in I / \ x \in f(A_i) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).}$$

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

L'inclusion contraire n'est pas toujours vraie. Par exemple, pour x réel on pose $f(x)=x^2$ puis $A=\{-1\}$ et $B=\{1\}$. $A\cap B=\varnothing$ et donc $f(A\cap B)=\varnothing$ puis $f(A)=f(B)=\{1\}$ et donc $f(A)\cap f(B)=\{1\}$.

3) Il n'y a aucune inclusion vraie entre $f(E\setminus A)$ et $F\setminus f(A)$. Par exemple, soit $f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^2\end{array}$ et $A=[-1,2]$.
$f(A)=[0,4]$ et donc $C_{\mathbb{R}}(f(A))=]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$ mais $f(C_{\mathbb{R}}A)=f(]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[)=]1,+\infty[$ et aucune inclusion entre les deux parties n'est vraie.

4) Soit $x\in E$.

$$x\in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcap_{i\in I}B_i\Leftrightarrow\forall i\in I,\ f(x)\in B_i\Leftrightarrow\forall i\in I,\ x\in f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcap_{i\in I}B_i)=\bigcap_{i\in I}f^{-1}(B_i).}$$

5) Soit $x\in E$.

$$x\in f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)\Leftrightarrow f(x)\in\bigcup_{i\in I}B_i\Leftrightarrow\exists i\in I,\ f(x)\in B_i\Leftrightarrow\exists i\in I,\ x\in f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(\bigcup_{i\in I}B_i)=\bigcup_{i\in I}f^{-1}(B_i).}$$

6) Soit $x\in E$.

$$x\in f^{-1}(F\setminus B_i)\Leftrightarrow f(x)\in F\setminus B_i\Leftrightarrow f(x)\notin B_i\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B_i)\Leftrightarrow x\in E\setminus f^{-1}(B_i).$$

Donc,

$$\boxed{f^{-1}(F\setminus B_i)=E\setminus f^{-1}(B_i).}$$

n° 12

1) ⇒ 2) Soit $X\in\mathscr{P}(E)$. On a toujours $X\subset f^{-1}(f(X))$. (En effet, pou $x\in E$, $x\in X\Rightarrow f(x)\in f(X)\Rightarrow x\in f^{-1}(f(X))$).
Réciproquement, soit $x\in E$.

$$\begin{aligned}x\in f^{-1}(f(X))&\Rightarrow f(x)\in f(X)\Rightarrow\exists x'\in X/\ f(x)=f(x')\Rightarrow\exists x'\in X/\ x=x'\ \text{(puisque f est injective)}\\&\Rightarrow x\in X.\end{aligned}$$

Finalement, $f^{-1}(f(X))\subset X$ et donc $f^{-1}(f(X))=X$.

2) ⇒ 1) Soit $x\in X$. Par hypothése, $f^{-1}\{f(x)\}=f^{-1}(f(\{x\}))=\{x\}$ ce qui signifie que $f(x)$ a un et un seul antécédent à savoir x. Par suite, tout élément de l'ensemble d'arrivée a au plus un antécédent par f et f est injective.

1) ⇒ 3) Soit $(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2$. On a toujours $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$ ($X\cap Y\subset X\Rightarrow f(X\cap Y)\subset f(X)$ et de même, $f(X\cap Y)\subset f(Y)$ et finalement, $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$).
Réciproquement, soit $y\in F$. $y\in f(X)\cap f(Y)\Rightarrow\exists(x,x')\in X\times Y/\ y=f(x)=f(x')$. Mais alors, puisque f est injective, $x=x'\in X\cap Y$ puis $y=f(x)\in f(X\cap Y)$. Finalement, $f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)$.

3) ⇒ 4) Soit $(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2$. $X\cap Y=\varnothing\Rightarrow f(X)\cap f(Y)=f(X\cap Y)=f(\varnothing)=\varnothing$.

4) ⇒ 5) Soit $(X,Y)\in(\mathscr{P}(E))^2$ tel que $Y\subset X$.
Puisque $X\backslash Y\subset X$, on a $f(X\backslash Y)\subset f(X)$. Mais, puisque $Y\cap(X\backslash Y)=\varnothing$, par hypothèse $f(X\backslash Y)\cap f(Y)=\varnothing$. Finalement,$f(X\backslash Y)\subset f(X)\setminus f(Y)$.
Inversement, si $f(X)\setminus f(Y)=\varnothing$, l'inclusion contraire est immédiate et si $f(X)\setminus f(Y)\neq\varnothing$, un élément de $f(X)\setminus f(Y)$ est l'image d'un certain élément de X qui ne peut être dans Y et donc est l'image d'un élément de $X\setminus Y$ ce qui montre que $f(X)\setminus f(Y)\subset f(X\setminus Y)$ et finalement que $f(X)\setminus f(Y)=f(X\setminus Y)$.

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.

5) $\Rightarrow$ **1)** Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Posons $X = \{x_1, x_2\}$ et $Y = \{x_2\}$.
On a donc $Y \subset X$. Par hypothèse $f(X \setminus Y) = f(X) \setminus f(Y)$ ce qui fournit $f(\{x_1\}) = f(\{x_1, x_2\}) \setminus f(\{x_2\})$ ou encore, $\{f(x_1)\} = \{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\}$. Maintenant, si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $\{f(x_1), f(x_2)\} \setminus \{f(x_2)\} = \varnothing$ (et pas $\{f(x_1)\}$). Donc $f(x_1) \neq f(x_2)$.
On a montré que f est injective.

n° 13 Montrons par récurrence que, pour $n \geq 2$, H_n peut s'écrire sous la forme $\dfrac{p_n}{q_n}$ où q_n est un entier pair et p_n est un entier impair (la fraction précédente n'étant pas nécessairement irréductible mais à coup sûr pas un entier).
Pour $n = 2$, $H_2 = \dfrac{3}{2}$ et H_2 est bien du type annoncé.

Soit $n \geq 2$. Supposons que pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, on ait $H_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k est un entier pair et montrons que $H_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ où p_{n+1} est un entier impair et q_{n+1} est un entier pair.
(Recherche. L'idée $H_{n+1} = \dfrac{p_n}{q_n} + \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{(n+1)p_n + q_n}{(n+1)q_n}$ ne marche à coup sur que si $(n+1)p_n + q_n$ est impair ce qui est assuré si $n+1$ est impair et donc n pair)

1er cas. Si n est pair, on peut poser $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $H_{n+1} = \dfrac{(2k+1)p_n + q_n}{(2k+1)q_n}$ et H_{n+1} est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair.

2ème cas. Si n est impair, on pose $n = 2k - 1$ où $k \geq 2$ (de sorte que $2k - 1 \geq 3$).

$$H_{n+1} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$$

(en séparant les fractions de dénominateurs pairs des fractions de dénominateurs impairs)

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1} = \frac{1}{2}H_k + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}.$$

Maintenant, en réduisant au même dénominateur et puisque un produit de nombres impairs est impair, on voit que $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2i+1}$ est du type $\dfrac{K}{2K'+1}$ où K et K' sont des entiers. Ensuite, puisque $2 \leq k \leq 2k - 1 = n$, par hypothèse de récurrence, $H_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ où p_k est un entier impair et q_k un entier pair. Après réduction au même dénominateur, on obtient

$$H_{n+1} = \frac{p_k}{2q_k} + \frac{K}{2K'+1} = \frac{(2K'+1)p_k + 2Kq_k}{2q_k(2K'+1)}.$$

$2Kq_k$ est un entier pair et $(2K'+1)p_k$ est un entier impair en tant que produit de deux nombres impairs. Donc le numérateur est bien un entier impair et puisque $2qk(2K'+1)$ est un entier pair, H_{n+1} est bien dans tous les cas de la forme désirée.

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair et donc n'est pas un entier.

n° 14

1) Il y a l'injection triviale $\begin{array}{rccc} f : & E & \to & \mathscr{P}(E) \\ & x & \mapsto & \{x\} \end{array}$.

2) Soit f une application quelconque de E dans $\mathscr{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective.
Soit $A = \{x \in E /\ x \notin f(x)\}$. Montrons que A n'a pas d'antécédent par f. Supposons par l'absurde que A a un antécédent a. Dans ce cas, où est a ?

$$a \in A \Rightarrow a \notin f(a) = A,$$

ce qui est absurde et

$$a \notin A \Rightarrow a \in f(a) = A,$$

ce qui est absurde. Finalement, A n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective. On a montré le théorème de Cantor : pour tout ensemble E (vide, fini ou infini), il n'existe pas de bijection de E sur $\mathscr{P}(E)$.

n° 15 f est bien une application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ car, pour tout couple (x, y) d'entiers naturels, l'un des deux entiers $x+y$ ou $x+y+1$ est pair et donc, $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ est bien un entier naturel (on peut aussi constater que $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = 1+2+\ldots+(x+y)$ est entier pour $x+y \geq 1$).

Remarque. La numérotation de $\mathbb{N}^2$ a été effectuée de la façon suivante :

	0	1	2	3	$\ldots$	x	$\ldots$
0	0	1	3	6			
1	2	4	7				
2	5	8					
3	9						
$\vdots$							
y							
$\vdots$							

Sur une parallèle à la droite d'équation $y = -x$, la somme $x+y$ est constante. Il en est de même de l'expression $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}$ et quand on descend de 1 en y, on avance de 1 dans la numérotation.

Lemme. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! p \in \mathbb{N}/\ \dfrac{p(p+1)}{2} \leq n < \dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$.

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on pourrait se contenter de constater que la suite des nombres triangulaires $\left(\dfrac{p(p+1)}{2}\right)_{p\geq 0}$ est strictement croissante. Néanmoins, on va fournir explicitement p en fonction de n.

Soient n et p deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}
\frac{p(p+1)}{2} \leq n < \frac{(p+1)(p+2)}{2} &\Leftrightarrow p^2+p-2n \leq 0 \text{ et } p^2+3p+2-2n > 0\\
&\Leftrightarrow p \leq \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} \text{ et } p > \frac{-3+\sqrt{8n+1}}{2} = -1 + \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\\
&\Leftrightarrow p \leq \frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2} < p+1 \Leftrightarrow p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Le lemme est démontré.

Montrons que f est surjective (et au passage, déterminons l'antécédent d'un entier n donné).

Soient n un entier naturel et $p = E\left(\dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ (p est un entier naturel). On pose $\left\{\begin{array}{l} x+y=p \\ y = n - \dfrac{p(p+1)}{2}\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} y = n - \dfrac{p(p+1)}{2} \\ x = p - y = \dfrac{p(p+3)}{2} - n\end{array}\right.$. Tout d'abord, $y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n - \dfrac{p(p+1)}{2} + \dfrac{p(p+1)}{2} = n$. Mais il reste encore à vérifier que x et y ainsi définis (qui sont à l'évidence des entiers relatifs) sont bien des entiers naturels. Puisque $\dfrac{p(p+1)}{2}$ est un entier naturel et que $n \geq \dfrac{p(p+1)}{2}$, y est bien un entier naturel. Ensuite, $\dfrac{p(p+3)}{2} = \dfrac{p(p+1)}{2} + p$ est aussi un entier naturel et de plus,

$$\frac{p(p+3)}{2} - n \geq \frac{p(p+3)}{2} - \left(\frac{(p+1)(p+2)}{2} - 1\right) = 0,$$

et x est bien un entier naturel. Ainsi, pour n naturel donné, en posant $p = E\left(\dfrac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$ puis $x = \dfrac{p(p+3)}{2} - n$ et $y = n - \dfrac{p(p+1)}{2}$, x et y sont des entiers naturels tels que $f((x,y)) = n$. f est donc surjective.

Montrons que f est injective.

Pour cela, on montre que si x et y sont des entiers naturels vérifiant $y + \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} = n$, alors nécessairement, $x+y = p$ (et $y = n - \dfrac{p(p+1)}{2}$).

Soient donc x et y deux entiers naturels. On a :

$$\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} \leq \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y = n < \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + (x+y+1) = \frac{(x+y+1)(x+y+2)}{2},$$

et le lemme montre que $x+y = p$. L'unicité du couple (x, y) est donc démontrée. f est une application injective et surjective et donc f est bijective. Sa réciproque est $\begin{array}{rccc} f^{-1} : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & n & \mapsto & \left(\frac{p(p+3)}{2}, n - \frac{p(p+1)}{2}\right) \end{array}$ où $p = E\left(\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}\right)$.

© Jean-Louis Rouget, 2008. Tous droits réservés.