Planche n° 5. Nombres complexes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (IT)** Calculer de deux façons les racines carrées de $1+i$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

n° 2 (T)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :
1) $z^2+z+1=0$
2) $2z^2+2z+1=0$
3) $z^2-2z\cos\theta+1=0$, θ réel donné.
4) $z^2-(6+i)z+(11+13i)=0$
5) $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.

n° 3 (IT)** (Une construction du pentagone régulier à la règle et au compas).
1) On pose $z=e^{2i\pi/5}$ puis $a=z+z^4$ et $b=z^2+z^3$. Déterminer une équation du second degré dont les solutions sont a et b et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
2) Le cercle de centre Ω d'affixe $-\frac{1}{2}$ passant par le point M d'affixe i recoupe (Ox) en deux points I et J. Montrer que $\overline{OI}+\overline{OJ}=\overline{OI}.\overline{OJ}=-1$ et en déduire une construction à la règle et au compas, du pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 dont un des sommets est le point d'affixe 1.
3) La diagonale $[AC]$ d'un pentagone régulier $(ABCDE)$ est recoupée par deux autres diagonales en deux points F et G. Calculer les rapports $\frac{AF}{AC}$ et $\frac{FG}{AF}$.

n° 4 (***) Soit $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donné. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3=\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$.

n° 5 (****)
1) Soit (ABC) un triangle dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle (ABC). Montrer que $I=\text{bar}\{A(a),B(b),C(c)\}$.
2) Déterminer z complexe tel que O soit le centre du cercle inscrit au triangle (PQR) dont les sommets ont pour affixes respectives z, z^2 et z^3.

n° 6 (*I)** Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c. Montrer que :

$$\begin{aligned}ABC \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ est racine de l'équation } az^2+bz+c=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc \Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

n° 7 (T)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4-(5-14i)z^2-2(5i+12)=0$.

n° 8 (**) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z^2+1)^n-(z-1)^{2n}=0$.

n° 9 (I)** Déterminer les complexes z tels que z, $\frac{1}{z}$ et $z-1$ aient même module.

n° 10 (I)** On note U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\forall z\in\mathbb{C},\ (z\in U\setminus\{-1\}\Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}/\ z=\frac{1+ix}{1-ix}).$$

n° 11 (IT)** Forme trigonométrique de $\frac{1+\cos\theta-i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ et de $\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}$.

n° 12 (*T) Calculer $(1+i\sqrt{3})^9$.

n° 13 (T)** Déterminer les racines quatrièmes de i et les racines sixièmes de $\frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$.

n° 14 (***) Montrer que les solutions de l'équation $1+z+z^2+...+z^{n-1}-nz^n=0$ sont de module inférieur ou égal à 1.

n° 15 (T)** Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \dfrac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1) $|Z| = 1$.
2) $|Z| = 2$.
3) $Z \in \mathbb{R}$.
4) $Z \in i\mathbb{R}$.

n° 16 (*T) Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :

1) $z' = z + 3 - i$
2) $z' = 2z + 3$
3) $z' = iz + 1$
4) $z' = (1-i)z + 2 + i$

n° 17 (I)** On considère l'équation $(E)\ :\ (z-1)^n - (z+1)^n = 0$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 donné.

1) Montrer que les solutions de (E) sont imaginaires pures.
2) Montrer que les solutions de (E) sont deux à deux opposées.
3) Résoudre (E).

n° 18 (*T)** (ESIM 1993)

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\operatorname{ch} z = \dfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $\operatorname{sh} z = \dfrac{1}{2}(e^z - e^{-z})$ et $\operatorname{th} z = \dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

1) Quels sont les nombres complexes z pour lesquels $\operatorname{th} z$ existe ?
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\operatorname{th} z = 0$.
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{cases}$.
4) Montrer que la fonction th réalise une bijection de $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / \ |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{4}\}$ sur $U = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < 1\}$.