Planche n° 5. Nombres complexes. Corrigé

n° 1 On a $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Les racines carrées de $1+i$ dans $\mathbb{C}$ sont donc $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$ et $-\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}$.
On a aussi, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$(x+iy)^2=1+i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-y^2=1\\x^2+y^2=\sqrt{2}\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)\\y^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}-1)\\xy>0\end{array}\right.\Leftrightarrow(x,y)\in\left\{\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}},\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)\right\}.$$

Les racines carrées de $1+i$ sont donc aussi $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$. Puisque $\mathrm{Re}(e^{i\pi/8})=\cos\dfrac{\pi}{8}>0$, on obtient $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/8}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$, ou encore

$$e^{i\pi/8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$$

et donc, par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\text{ et }\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

n° 2

1) $z^2+z+1=0\Leftrightarrow z=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=j$ ou $z=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=j^2$.

2) $\Delta'=1^2-2=-1=i^2$. L'équation a donc deux solutions non réelles et conjuguées, à savoir $z_1=\dfrac{1}{2}(-1+i)$ et $z_2=\dfrac{1}{2}(-1-i)$.

3) Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Pour tout complexe z, on a

$$\begin{aligned}z^2-2z\cos\theta+1&=(z-\cos\theta)^2+1-\cos^2\theta=(z-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=(z-\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2\\&=(z-\cos\theta-i\sin\theta)(z-\cos\theta+i\sin\theta)=(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})\end{aligned}$$

L'équation proposée a donc deux solutions (pas nécessairement distinctes) $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=e^{-i\theta}$. De plus,
$\Delta'=\cos^2\theta-1=-\sin^2\theta$ et ces solutions sont distinctes si et seulement si $\theta\notin\pi\mathbb{Z}$.

4) Soit (E) l'équation $z^2-(6+i)z+(11+3i)=0$.
Son discriminant est $\Delta=(6+i)^2-4(11+13i)=-9-40i$. Comme $40=2\times20=2\times(4\times5)$ et que $4^2-5^2=16-25=-9$, on est en droit de deviner que $\Delta=(4-5i)^2$. L'équation (E) a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\dfrac{6+i+4-5i}{2}=5-2i$ et $z_2=\dfrac{6+i-4+5i}{2}=1+3i$.

5) Soit (E) l'équation $2z^2-(7+3i)z+(2+4i)=0$.
Son discriminant est $\Delta=(7+3i)^2-8(2+4i)=24+10i$. Comme $10=2\times5=2\times(5\times1)$ et que $5^2-1^2=24$, on est en droit de deviner que $\Delta=(5+i)^2$. L'équation proposée a deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ à savoir $z_1=\dfrac{7+3i+5+i}{4}=3+i$ et $z_2=\dfrac{7+3i-5-i}{4}=\dfrac{1}{2}(1+i)$.

n° 3

1) On a $a=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $b=2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. 1, z, z^2, z^3 et z^4 sont les cinq racines cinquièmes de 1 dans $\mathbb{C}$. Par suite, $1+z+z^2+z^3+z^4=0$. Mais alors

$$a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$$

et

$$ab = (z+z^4)(z^2+z^3) = z^3+z^4+z^6+z^7 = z+z^2+z^3+z^4 = -1 \text{ (car } z^5=1).$$

a et b sont donc les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ dont les racines sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Enfin, puisque $\dfrac{2\pi}{5} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $a>0$. Par suite, $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. D'autre part, $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) > 0$ et donc,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = +\sqrt{1-\cos^2(\frac{2\pi}{5})} = \sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

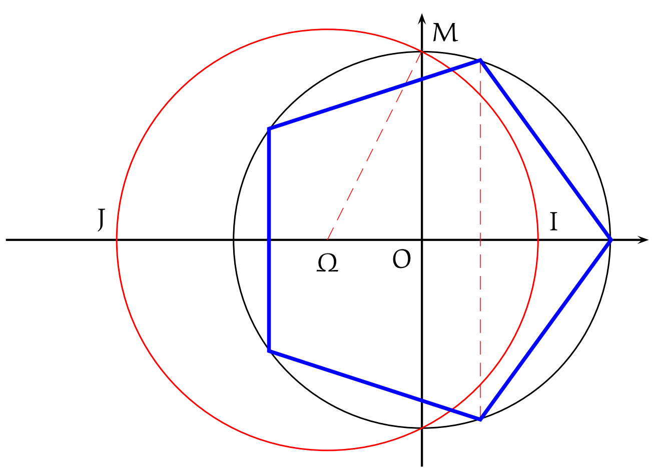
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.}$$

De même, en remplaçant $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Enfin, $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = \dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

2) Le rayon du grand cercle vaut, d'après le théorème de Pythagore :

$$R = \sqrt{\Omega O^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $x_I = x_\Omega + R = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_J = x_\Omega - R = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Par suite, $x_I = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $x_J = 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$. Ceci montre que les médiatrices des segments $[O, I]$ et $[O, J]$ coupent le cercle de centre O et de rayon 1 en quatre des cinq sommets du pentagone.

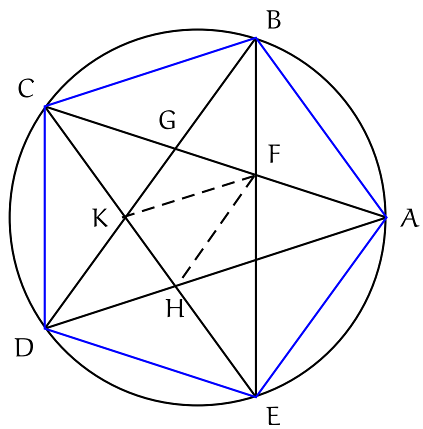


3) Posons $x = \dfrac{AF}{AC}$. D'après le théorème de Thales (je vous laisse vérifier les parallélismes),

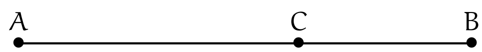
$$x = \frac{AF}{AC} = \frac{HK}{HC} = \frac{FG}{FC} = \frac{AC-2AF}{AC-AF} = \frac{1-2x}{1-x}.$$

Donc $x^2-3x+1=0$ et puisque $x<1$, $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Puis

$$\frac{AG}{AC} = \frac{AC-AF}{AC} = 1-x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{FG}{AF} = \frac{AC-2AF}{AF} = \frac{1}{x}-2 = \frac{2}{3-\sqrt{5}}-2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}-2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$



Définition du nombre d'or.



On veut que C partage le segment $[A, B]$ de telle sorte que $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$ (« $\dfrac{\text{petit}}{\text{moyen}} = \dfrac{\text{moyen}}{\text{grand}}$ ») c'est-à-dire, en posant $a = AB$ et $x = AC$, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a-x}{x}$ ou encore $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \dfrac{x}{a} - 1 = 0$ et donc, puisque $\dfrac{x}{a} > 0$, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\boxed{\text{Le nombre d'or (ou proportion dorée) est le nombre } \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0,618...}$$

On peut aussi prendre pour le nombre d'or le rapport $\dfrac{a}{x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$

n° 4 Soit $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = e^{2i\alpha}$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ \frac{1+iz}{1-iz} = e^{i(\frac{2\alpha}{3}+\frac{2k\pi}{3})} = \omega_k \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ i(\omega_k+1)z = \omega_k - 1.$$

Maintenant, pour $k \in \{-1, 0, 1\}$,

$$\omega_k = -1 \Leftrightarrow \frac{2\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3} \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha \in -k\pi + \frac{3\pi}{2} + 3\pi\mathbb{Z},$$

ce qui est exclu pour $\alpha \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. Donc,

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{\omega_k - 1}{i(\omega_k+1)} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}} \frac{e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} - e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}}{i(e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})} + e^{-i(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})})}$$

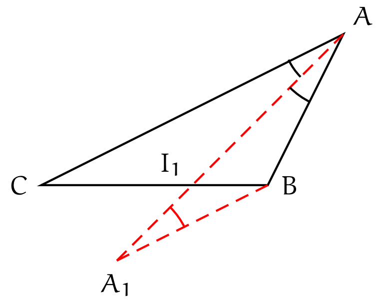
$$\Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \frac{2i\sin(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})}{i(2\cos(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3}))} \Leftrightarrow \exists k \in \{-1,0,1\}/\ z = \tan(\frac{\alpha}{3}+\frac{k\pi}{3})$$

n° 5

1) On note I_1 le point d'intersection de la bissectrice (Δ_1) de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC). La parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_1 (puisque (AC) n'est pas parallèle à (Δ_1)) en un point A_1. Les angles alternes-internes $\widehat{CAA_1}$ et $\widehat{AA_1B}$ sont alors égaux. Puisque d'autre part, $\widehat{CAA_1} = \widehat{A_1AB}$, on en déduit que $\widehat{AA_1B} = \widehat{A_1AB}$ et donc que le triangle (ABA_1) est isocèle en B. D'après le théorème de Thalès, on a alors

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{A_1B}{AC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b},$$

et donc puisque I_1 est entre B et C, $b\overrightarrow{I_1B} + c\overrightarrow{I_1C} = \vec{0}$, ou enfin $I_1 = \text{bar}\{B(b), C(c)\}$.



On a aussi bien sûr les deux autres égalités $I_2 = \text{bar}\{A(a), C(c)\}$ et $I_3 = \text{bar}\{A(a), B(b)\}$ où I_2 et I_3 sont les points d'intersection des deux autres bissectrices avec (AC) et (AB) respectivement.

Soit alors $I' = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$. D'après le théorème du barycentre partiel, on a

$$I' = \text{bar}\{A(a), I_1(b+c)\} = \text{bar}\{B(b), I_2(a+c)\} = \text{bar}\{C(c), I_3(a+b)\},$$

ce qui montre que I' est sur (AI_1), (BI_2) et (CI_3), c'est-à-dire sur les trois bissectrices. Par suite, $I' = I$.

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ ne sont pas deux à deux distincts} \Leftrightarrow z^2 = z \text{ ou } z^3 = z \text{ ou } z^3 = z^2 \Leftrightarrow z \in \{-1, 0, 1\}.$$

Ensuite, pour $z \notin \{-1, 0, 1\}$,

$$z,\ z^2 \text{ et } z^3 \text{ sont alignés} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ z^3 - z = \lambda(z^2 - z) \Leftrightarrow \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

Finalement, (z, z^2, z^3) est un « vrai » triangle si et seulement si z n'est pas réel.

Soit alors z un complexe non réel.

$$\begin{aligned} O \text{ centre du cercle inscrit au triangle } (PQR) &\Leftrightarrow O = \text{bar}\{P(QR), Q(PR), R(PQ)\} \\ &\Leftrightarrow z|z^2 - z^3| + z^2|z - z^3| + z^3|z - z^2| = 0 \Leftrightarrow z.|z|.|1 - z|(|z| + z|1 + z| + z^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow |z| + z|1 + z| + z^2 = 0 \ (E) \ (\text{car } z \notin \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} |z| + z|1 + z| + z^2 = 0 &\Leftrightarrow (z + \frac{|z|}{z}) + |1 + z| = 0 \Rightarrow z + \frac{|z|}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{|z|}{z} = \overline{z} + \frac{|z|}{\overline{z}} \\ &\Leftrightarrow z - \overline{z} - |z|\frac{z - \overline{z}}{z\overline{z}} = 0 \Leftrightarrow (z - \overline{z})(1 - \frac{1}{|z|}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{|z|} = 0 \ (\text{car } z \neq \overline{z}) \\ &\Leftrightarrow |z| = 1 \end{aligned}$$

Posons donc $z = e^{i\theta}$ où $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. En reportant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} + |1 + e^{i\theta}| = 0 \Leftrightarrow 2\cos\theta + |e^{i\theta/2}|.|2\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos\theta + |\cos\frac{\theta}{2}| = 0 \Leftrightarrow 2|\cos\frac{\theta}{2}|^2 + |\cos\frac{\theta}{2}| - 1 = 0 \Leftrightarrow |\cos\frac{\theta}{2}| \text{ est solution de l'équation } 2X^2 + X - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| \in \left\{\frac{1}{2}, -1\right\} \Leftrightarrow \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow z \in \{j, j^2\} \end{aligned}$$

Les nombres complexes solutions sont donc j et j^2.

n° 6

$$\begin{aligned} (A, B, C) \text{ équilatéral} &\Leftrightarrow C = r_{A,\pi/3}(B) \text{ ou } C = r_{A,-\pi/3}(B) \Leftrightarrow c - a = (-j^2)(b - a) \text{ ou } c - a = (-j)(b - a) \\ &\Leftrightarrow (-1 - j^2)a + j^2 b + c = 0 \text{ ou } (-1 - j)a + jb + c = 0 \Leftrightarrow ja + j^2 b + c = 0 \text{ ou } j^2 a + jb + c = 0 \\ &\Leftrightarrow (j^2)^2 a + j^2 b + c = 0 \text{ ou } j^2 a + jb + c = 0 \Leftrightarrow j \text{ ou } j^2 \text{ sont solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}(A,B,C)\text{ équilatéral} &\Leftrightarrow ja+j^2b+c=0 \text{ ou } j^2a+jb+c=0\\ &\Leftrightarrow (ja+j^2b+c)(j^2a+jb+c)=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+(j+j^2)(ab+ac+bc)=0\\ &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(A,B,C)\text{ équilatéral} &\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0\\ &\Leftrightarrow -a^2+ab+ac-bc-b^2+bc+ba-ac-c^2+ca+cb-ab=0\\ &\Leftrightarrow (c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)=0 \Leftrightarrow \frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=0\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}=0.\end{aligned}$$

n° 7 Le discriminant de l'équation $Z^2-(5-14i)Z-2(5i+12)=0$ vaut

$$\Delta=(5-14i)^2+8(5i+12)=-75-100i=25(-3-4i)=(5(1-2i))^2.$$

Cette équation admet donc les deux solutions $Z_1=\dfrac{5-14i+5-10i}{2}=5-12i$ et $Z_2=\dfrac{5-14i-5+10i}{2}=-2i$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}z\text{ est solution de l'équation proposée} &\Leftrightarrow z^2=5-12i=(3-2i)^2 \text{ ou } z^2=-2i=(1-i)^2\\ &\Leftrightarrow z=3-2i \text{ ou } z=-3+2i \text{ ou } z=1-i \text{ ou } z=-1+i.\end{aligned}$$

n° 8 Posons, pour n naturel non nul, $P=(X^2+1)^n-(X-1)^{2n}$.

$$\begin{aligned}P&=X^{2n}+(\text{termes de degré}\leq 2n-2)-X^{2n}+2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré }\leq 2n-2)\\ &=2nX^{2n-1}+(\text{termes de degré}\leq 2n-2).\end{aligned}$$

Donc $\deg(P)=2n-1$ et P admet dans $\mathbb{C}$, $2n-1$ racines, distinctes ou confondues.

$$\begin{aligned}(z^2+1)^n=(z-1)^{2n} &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,...,n-1\}/\ z^2+1=\omega_k(z-1)^2 \text{ où } \omega_k=e^{2ik\pi/n}\\ &\Leftrightarrow \exists k\in\{0,...,n-1\}/\ (1-\omega_k)z^2+2\omega_k z+(1-\omega_k)=0\end{aligned}$$

Si $k=0$, l'équation précédente s'écrit $2z=0$ ou encore $z=0$.
Si k est élément de $[\![1,n-1]\!]$, $\Delta'_k=\omega_k^2-(1-\omega_k)^2=2\omega_k-1=2e^{2ik\pi/n}-1$.
Soit d_k une racine carrée dans $\mathbb{C}$ de Δ'_k (difficile à expliciter semble-t-il). On a $S=\{0\}\cup\left\{\dfrac{-e^{2ik\pi/n}\pm d_k}{1-e^{2ik\pi/n}}, k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$.

n° 9 Soient z un complexe non nul, M le point d'affixe z et A le point d'affixe 1.

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|\Leftrightarrow |z|=\frac{1}{|z|}\Leftrightarrow |z|^2=1\Leftrightarrow |z|=1,$$

et

$$|z|=|z-1|\Leftrightarrow OM=AM\Leftrightarrow M\in\text{med}[OA]\Leftrightarrow x_M=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \text{Re}(z)=\frac{1}{2}.$$

Donc,

$$|z|=\left|\frac{1}{z}\right|=|z-1|\Leftrightarrow |z|=1 \text{ et } \text{Re}(z)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow z=-j \text{ ou } z=-j^2.$$

n° 10 Soient $x \in \mathbb{R}$ et $z = \dfrac{1+ix}{1-ix}$. Puisque $1 - ix \neq 0$, z est bien défini et $|z| = \dfrac{|1+ix|}{|1-ix|} = \dfrac{|1+ix|}{|\overline{1+ix}|} = 1$. Enfin, $z = \dfrac{-1+ix+2}{1-ix} = -1 + \dfrac{2}{1-ix} \neq -1$. On a montré que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1+ix}{1-ix} \in U \setminus \{-1\}.$$

Réciproquement, soit $z \in U \setminus \{-1\}$. Il existe un réel $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ tel que $z = e^{i\theta}$. Mais alors,

$$z = e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{-i\theta/2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}(1 + i\tan\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}(1 - i\tan\frac{\theta}{2})} = \frac{1 + i\tan\frac{\theta}{2}}{1 - i\tan\frac{\theta}{2}}\ (\cos\frac{\theta}{2} \neq 0 \text{ car } \frac{\theta}{2} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),$$

et z est bien sous la forme voulue avec $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$.

n° 11 a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$1 + \cos\theta + i\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \text{ et } \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}.$$

Donc, $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ existe pour $\theta \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Pour un tel θ,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{\cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)}{\sin(\theta/2) + i\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\frac{e^{-i\theta/2}}{e^{i(\pi-\theta)/2}} = -i\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- 1er cas.] $\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[\Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$.

Dans ce cas, la forme trigonométrique de $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$ est $\mathrm{cotan}(\dfrac{\theta}{2})e^{-i\pi/2}$ (module= $\mathrm{cotan}(\dfrac{\theta}{2})$ et argument= $-\dfrac{\pi}{2}$ (2π)).

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), -\frac{\pi}{2}\right].$$

- 2ème cas. $\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$.

Dans ce cas,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = -\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2}).e^{i\pi/2} = |\,\mathrm{cotan}(\frac{\theta}{2})|e^{i\pi/2},$$

et donc,

$$\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = \left[-\,\mathrm{cotan}\left(\frac{\theta}{2}\right), \frac{\pi}{2}\right].$$

- 3ème cas. $\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, on a $\dfrac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta} = 0$.

b) Pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = i\,\mathrm{cotan}\,\frac{\theta}{2}.$$

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

Si $\theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = [-\,\mathrm{cotan}\,\dfrac{\theta}{2}, -\dfrac{\pi}{2}]$.

Si $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$, $\dfrac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = 0$.

n° 12 $(1 + i\sqrt{3})^9 = (2e^{i\pi/3})^9 = 2^9 e^{3i\pi} = -512$.

La forme algébrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à l'addition.
La forme trigonométrique d'un complexe est particulièrement bien adaptée à la multiplication.

n° 13 $i = e^{i\pi/2}$ et les racines quatrièmes de i sont donc les $e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2})}$, $k \in \{0,1,2,3\}$.
Ensuite, $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-2}{e^{i\pi/3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}$. Les racines sixièmes de $\dfrac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ sont donc les $\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3})}$, $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

n° 14 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

$$|1+z+\ldots+z^{n-1}| \leq 1+|z|+|z|^2+\ldots+|z|^{n-1} < |z|^n+|z|^n+\ldots+|z|^n = n|z|^n = |nz^n|,$$

et en particulier, $1+z+\ldots+z^{n-1} \neq nz^n$. Donc, si $1+z+\ldots+z^{n-1}-nz^n = 0$, alors $|z| \leq 1$.

n° 15

A- Solutions algébriques.] Pour $z \in \mathbb{C}$, posons $z = x+iy$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
1)

$$|Z| = 1 \Leftrightarrow \frac{|1+z|^2}{|1-z|^2} = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = (1-x)^2+y^2 \text{ et } (x,y) \neq (1,0) \Leftrightarrow 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble cherché est la droite (Oy).

2)

$$\begin{aligned}|Z| = 2 &\Leftrightarrow (1+x)^2+y^2 = 4((1-x)^2+y^2) \Leftrightarrow 3x^2+3y^2-10x+3 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0)\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{10}{3}x+1 = 0 \text{ et } (x,y) \neq (1,0)\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9} \text{ et } (x,y) \neq (1,0)\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2 = \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre $\Omega\left(\dfrac{5}{3},0\right)$ et de rayon $\dfrac{4}{3}$.

3)

$$\begin{aligned}Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} &\Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = \frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}\\ &\Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = (1-z)(1+\overline{z}) \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z-\overline{z} = \overline{z}-z \text{ et } z \neq 1\\ &\Leftrightarrow z = \overline{z} \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \text{ et } z \neq 1.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la droite (Ox) privé du point $(1,0)$.

4)

$$\begin{aligned}Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Z = -\overline{Z} \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}} &\Leftrightarrow (1+z)(1-\overline{z}) = -(1-z)(1+\overline{z}) \text{ et } z \neq 1\\ \Leftrightarrow 1-z\overline{z} = -1+\overline{z} \text{ et } z \neq 1 &\Leftrightarrow |z|^2 = 1 \text{ et } z \neq 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } z \neq 1.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1,0)$.

B- Solutions géométriques. Soient A et B les points d'affixes respectives -1 et 1 et $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché. Soit M un point du plan distinct de B d'affixe z.

1)

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow |z+1| = |z-1| \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB] = (Oy).$$

2) Soit $\Omega = \text{bar}(A(1), B(-4))$. On a $x_\Omega = \dfrac{-1}{5}(x_A-4x_B) = \dfrac{5}{3}$ et $y_\Omega = \dfrac{-1}{5}(y_A-4y_B) = 0$.

$$\begin{aligned}M \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow |z+1|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow AM^2 = 4BM^2\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2-4\overrightarrow{BM}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2-4(\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{\Omega M})^2 = 0\\ &\Leftrightarrow -3\overrightarrow{\Omega M}^2+2(\overrightarrow{A\Omega}-4\overrightarrow{B\Omega}).\overrightarrow{\Omega M}+\overrightarrow{A\Omega}^2-4\overrightarrow{B\Omega}^2 = 0\\ &\Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{1}{3}(\Omega A^2-4\Omega B^2)\end{aligned}$$

Or, $\Omega A^2 = (\frac{5}{3}+1)^2 = \frac{64}{9}$ et $\Omega B^2 = (\frac{5}{3}-1)^2 = \frac{4}{9}$. Par suite,

$$\frac{1}{3}(\Omega A^2 - 4\Omega B^2) = \frac{1}{3}(\frac{64}{9} - \frac{16}{9}) = \frac{16}{9}.$$

Ainsi,

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow \Omega M^2 = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \Omega M = \frac{4}{3},$$

et on retrouve le cercle de centre $\Omega(\frac{5}{3}, 0)$ et de rayon $\frac{4}{3}$.

3)

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 0\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = 0\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}. \end{aligned}$$

et on retrouve la droite (Ox) privée du point $(1, 0)$.

4)

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\Leftrightarrow z = -1 \text{ ou } \arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \Leftrightarrow M = A \text{ ou } \left(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (\pi) \\ &\Leftrightarrow M \text{ est sur le cercle de diamètre } [AB] \text{ privé de } B. \end{aligned}$$

et on retrouve le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point $(1, 0)$.

n° 16 Soit f la transformation considérée.
1) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3, -1)$.
2) $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.
3) $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4) $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

n° 17

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. Soient M, A et B les points d'affixes resectives z, 1 et -1.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Rightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Rightarrow |(z-1)^n| = |(z+1)^n| \Rightarrow |z-1|^n = |z+1|^n \Rightarrow |z-1| = |z+1| \\ &\Rightarrow AM = BM \Rightarrow M \in \text{med}[AB] \Rightarrow M \in (Oy) \Rightarrow z \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$(-z-1)^n - (-z+1)^n = (-1)^n((z+1)^n - (z-1)^n) = -(-1)^n((z-1)^n - (z+1)^n).$$

Par suite,

$$z \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow (z-1)^n - (z+1)^n = 0 \Leftrightarrow (-z-1)^n - (-z+1)^n = 0 \Leftrightarrow -z \text{ solution de } (E).$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z \text{ solution de } (E) &\Leftrightarrow (z-1)^n = (z+1)^n \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!]/\ z + 1 = e^{2ik\pi/n}(z-1) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{e^{2ik\pi/n} + 1} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{e^{ik\pi/n} + e^{-ik\pi/n}} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = \frac{2i \sin\frac{k\pi}{n}}{2\cos\frac{k\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!]/\ z = i\,\text{cotan}\,\frac{k\pi}{n} \end{aligned}$$

n° 18

1) Soit $z \in \mathbb{C}$. $\text{sh}\,z$ et $\text{ch}\,z$ sont définis et donc, $\text{th}\,z$ existe si et seulement si $\text{ch}\,z \neq 0$. Or,

$$\operatorname{ch} z = 0 \Leftrightarrow e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow e^{2z} = e^{i\pi} \Leftrightarrow 2z \in i\pi + 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

$\operatorname{th} z$ existe si et seulement si $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

2) Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

$$\operatorname{th} z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{-z} \Leftrightarrow e^{2z} = 1 \Leftrightarrow 2z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in i\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \cap i\pi\mathbb{Z} = \varnothing$, $\operatorname{th} z = 0$ si et seulement si $z \in i\pi\mathbb{Z}$.

3) Soit $z \notin i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|\operatorname{th} z| < 1 &\Leftrightarrow |e^z - e^{-z}|^2 < |e^z + e^{-z}|^2 \Leftrightarrow (e^z - e^{-z})(e^{\overline{z}} - e^{-\overline{z}}) < (e^z + e^{-z})(e^{\overline{z}} + e^{-\overline{z}}) \\
&\Leftrightarrow -e^{z-\overline{z}} - e^{-(z-\overline{z})} < e^{z-\overline{z}} + e^{-(z-\overline{z})} \Leftrightarrow 2(e^{2iy} + e^{-2iy}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(2y) > 0
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\left\{\begin{array}{l} |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2} \\ |\operatorname{th} z| < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |y| < \dfrac{\pi}{2} \\ \cos(2y) > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow |y| < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow z \in \Delta.$$

4) Soit $z \in \Delta$.
D'après 1), $\operatorname{th} z$ existe et d'après 3), $|\operatorname{th} z| < 1$. Donc $z \in \Delta \Rightarrow \operatorname{th} z \in U$. Ainsi, th est une application de Δ dans U.

Soit alors $Z \in U$ et $z \in \Delta$.

$$\operatorname{th} z = Z \Leftrightarrow \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1} = Z \Leftrightarrow e^{2z} = \frac{1 + Z}{1 - Z}.$$

Puisque $Z \neq -1$, $\frac{1 + Z}{1 - Z} \neq 0$ et on peut poser $\frac{1 + Z}{1 - Z} = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
e^{2z} = \frac{1 + Z}{1 - Z} &\Leftrightarrow e^{2z} = re^{i\theta} \Leftrightarrow e^{2x} = r \text{ et } 2y \in \theta + 2\pi\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln r \text{ et } y \in \frac{\theta}{2} + \pi\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Maintenant, on ne peut avoir $\theta = \pi$. Dans le cas contraire, on aurait $\frac{1 + Z}{1 - Z} = -r \in \mathbb{R}_-^*$ puis $Z = \frac{r + 1}{r - 1} \in \mathbb{R}$. Par suite, puisque $|Z| < 1$, on aurait $Z \in]-1, 1[$ et donc $\frac{1 + Z}{1 - Z} \in \mathbb{R}_+^*$ ce qui est une contradiction. Donc, $\theta \in]-\pi, \pi[$ puis $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Mais alors,

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{th} z = Z \\ z \in \Delta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}\ln r \\ y = \dfrac{\theta}{2} \end{array}\right. .$$

Ainsi, tout élément Z de U a un et un seul antécédent z dans Δ (à savoir $z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + Z}{1 - Z}\right| + \frac{i}{2}\operatorname{Arg}\left(\frac{1 + Z}{1 - Z}\right)$ où $\operatorname{Arg}\left(\frac{1 + Z}{1 - Z}\right)$ désigne l'argument de $\frac{1 + Z}{1 - Z}$ qui est dans $]-\pi, \pi[$).

Finalement, th réalise donc une bijection de Δ sur U.