

Planche n° 6. Le binôme de NEWTON. Les symboles Σ et Π

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 (IT) Identités combinatoires (la difficulté va en augmentant graduellement de facile à assez difficile sans être insurmontable).

- 1) Calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$.
- 2) Montrer que $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$ et trouver la valeur commune des deux sommes.
- 3) Calculer les sommes $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$ et $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$.
- 4) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- 5) Montrer que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$ (utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).
- 6) Calculer les sommes $0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + \dots + n \cdot \binom{n}{n}$ et $\frac{\binom{n}{0}}{1} + \frac{\binom{n}{1}}{2} + \dots + \frac{\binom{n}{n}}{n+1}$ (considérer dans chaque cas un certain polynôme astucieusement choisi).
- 7) Montrer que $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$ où $0 \leq p \leq n$. Interprétation dans le triangle de PASCAL ?
- 8) a) Soit $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n+1} et en déduire I_n en fonction de n (faire une intégration par parties dans $I_n - I_{n+1}$).
- b) Démontrer l'identité valable pour $n \geq 1$: $1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} + \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$.

n° 2 (T)** Quel est le coefficient de $a^4 b^2 c^3$ dans le développement de $(a - b + 2c)^9$.

n° 3 (I)** Développer $(a + b + c + d)^2$ et $(a + b + c)^3$.

n° 4 (*)** Soit $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Quel est le plus grand terme du développement de $(a + b)^n$?

n° 5 (*) Résoudre dans \mathbb{N}^* l'équation $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$.

n° 6 (IT) Cet exercice est consacré aux sommes de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique.

- 1) (*) Calculer $\sum_{i=3}^n i$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$, $\sum_{i=1}^n (2i - 1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\sum_{k=4}^{n+1} (3k + 7)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$.
- 2) (*) Calculer le nombre $1, 1111\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1, \underbrace{11\dots 1}_n$ et le nombre $0, 9999\dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0, \underbrace{99\dots 9}_n$.
- 3) (*) Calculer $\underbrace{1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1}}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- 4) (*) Calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
- 5) (**) Calculer $\sum_{k=0}^n \cos \frac{k\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.
- 6) (**) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(k\theta)$.
- 7) (***) Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

8) (**) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

a) Calculer la suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$.

n° 7 (IT) (Cet exercice est consacré aux sommes télescopiques.) Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

2) (***) Calculer $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).

3) (**) Calculer $\sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{1}{k^2 + k + 1}$ (aller relire certaines formules établies dans la planche n° 2).

4) (**) Calculer $\sum_{k=1}^n \operatorname{Arctan} \frac{2}{k^2}$.

n° 8 (I) Calculer les sommes suivantes :

1) (**) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} 1$.

2) (**) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} j$.

3) (*) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$.

4) (***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (utiliser les résultats du n° 7, 2)).

n° 9 (I)

1) (*) Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2) (***) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}$, $a \in]0, \pi[$, $n \in \mathbb{N}^*$.