Planche n° 6. Le binôme de Newton. Les symboles Σ et Π. Corrigé

n° 1 1) D'après la formule du binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^k\times 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n.}$$

2) Soit n un entier naturel non nul. Posons $S_1=\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2k}$ et $S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{E((n-1)/2)}\binom{n}{2k+1}$. Alors

$$S_1-S_2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0\ (\text{car } n\geq 1),$$

et donc $S_1=S_2$. Puis $S_1+S_2=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, et donc $S_1=S_2=2^{n-1}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots=2^{n-1}.}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. En posant $j=e^{2i\pi/3}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^k=(1+j)^n \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}j^{2k}=(1+j^2)^n.$$

En additionnant ces trois égalités, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k})=2^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n.$$

Maintenant,
- si $k\in 3\mathbb{N}$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p$ et $1+j^k+j^{2k}=1+(j^3)^p+(j^3)^{2p}=3$ car $j^3=1$.
- si $k\in 3\mathbb{N}+1$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p+1$ et $1+j^k+j^{2k}=1+j(j^3)^p+j^2(j^3)^{2p}=1+j+j^2=0$
- si $k\in 3\mathbb{N}+2$, il existe $p\in\mathbb{N}$ tel que $k=3p+2$ et $1+j^k+j^{2k}=1+j^2(j^3)^p+j^4(j^3)^{2p}=1+j^2+j=0$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1+j^k+j^{2k})=3\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}&=\frac{1}{3}(2^n+(1+j)^n+(1+j^2)^n)=\frac{1}{3}(2^n+2\,\mathrm{Re}((1+j)^n))\\&=\frac{1}{3}(2^n+2\,\mathrm{Re}((-j^2)^n))=\frac{1}{3}(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3})\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{E(n/3)}\binom{n}{3k}=\frac{1}{3}\left(2^n+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).}$$

4) Pour $1\leq k\leq n$, on a

$$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=k\binom{n-1}{k-1}.$$

5) $\binom{2n}{n}$ est le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$. Mais d'autre part ,

$$(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right).$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de x^n vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ ou encore $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$. Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et donc

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$.

Pour x réel,

$$P(x) = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)' = ((1+x)^n)' = n(1+x)^{n-1}.$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

2ème solution. D'après 1) et 4),

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.}$$

1ère solution. Pour x réel, posons $P(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$. On a

$$P'(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = (1+x)^n,$$

et donc, pour x réel,

$$P(x) = P(0) + \int_0^x P'(t)\ dt = \int_0^1 (1+t)^n\ dt = \frac{1}{n+1}((1+x)^{n+1} - 1).$$

En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2ème solution. D'après 4), $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$ et donc

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n+1}{k+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1} - 1) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.}$$

7) Pour $1 \leq k \leq n-p$, $\binom{p+k}{p} = \binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$ (ce qui reste vrai pour $k=0$ en tenant compte de $\binom{p}{p+1}=0$). Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-p}\binom{p+k}{p} &= 1+\sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k+1}{p+1}-\binom{p+k}{p+1} = 1+\sum_{k=2}^{n-p+1}\binom{p+k}{p+1}-\sum_{k=1}^{n-p}\binom{p+k}{p+1}\\ &= 1+\binom{n+1}{p+1}-1=\binom{n+1}{p+1}.\end{aligned}$$

Interprétation dans le triangle de Pascal. Quand on descend dans le triangle de Pascal, le long de la colonne p, du coefficient $\binom{p}{p}$ (ligne p) au coefficient $\binom{p}{n}$ (ligne n), et que l'on additionne ces coefficients, on trouve $\binom{n+1}{p+1}$ qui se trouve une ligne plus bas et une colonne plus loin.

8) a) Pour n naturel donné, posons $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\ dx$. Une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 ((1-x^2)^n-(1-x^2)^{n+1})\ dx = \int_0^1 x^2(1-x^2)^n\ dx = \int_0^1 x\times x(1-x^2)^n\ dx\\ &= \left[-x\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 (1-x^2)^{n+1}\ dx = \frac{1}{2(n+1)}I_{n+1},\end{aligned}$$

et donc $2(n+1)(I_n - I_{n+1}) = I_{n+1}$ ou encore :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (2n+3)I_{n+1} = 2(n+1)I_n.}$$

On a déjà $I_0 = 1$. Puis, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1}I_{n-1} = \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1}\dots\frac{2}{3}\times I_0 = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}.$$

b) Pour n entier naturel non nul donné :

$$\begin{aligned}1-\frac{\binom{n}{1}}{3}+\frac{\binom{n}{2}}{5}+\dots+(-1)^n\frac{\binom{n}{n}}{2n+1} &= \int_0^1 \left(1-\binom{n}{1}x^2+\binom{n}{2}x^4+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}x^{2n}\right)\ dx\\ &= \int_0^1 (1-x^2)^n\ dx = I_n = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 3.1}.\end{aligned}$$

n° 2 La formule du binôme de Newton fournit

$$(a-b+2c)^9 = \sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}(a-b)^k(2c)^{9-k} = (a-b)^9+\dots+\binom{9}{6}(a-b)^6(2c)^3+\dots+(2c)^9.$$

Ensuite,

$$(a-b)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}a^k(-b)^{6-k} = a^6-\dots+\binom{6}{4}a^4b^2-..+b^6.$$

Le coefficient cherché est donc

$$\binom{9}{6}\binom{6}{4}2^3 = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2}\times\frac{6\times 5}{2}\times 2^3 = 3\times 4\times 7\times 3\times 5\times 8 = 10080.$$

n° 3 Il ne faut pas développer ces expressions avec des étapes intermédiaires utilisant le binôme de Newton ($(a+b+c+d)^2 = ((a+b)+(c+d))^2$ ou $(a+b+c)^3 = ((a+b)+c)^3$) mais il faut développer directement en comptant les termes.

• Le développement de $(a+b+c+d)^2 = (a+b+c+d)(a+b+c+d)$ est constitué avant regroupement de $4\times 4 = 16$ termes. Ces termes sont de deux types :

- les termes où la même lettre est utilisé deux fois $aa = a^2$ . . . Il y a 4 termes de ce type.
- les 12 autres termes utilisent deux lettres différentes : ab, ac, . . . cd. Il y a 6 types de tels termes et chacun apparaît donc 2 fois.

Au total

$$\boxed{(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}$$

• Le développement de $(a+b+c)^3 = (a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$ est constitué avant regroupement de $3\times 43\times 3 = 27$ termes. Ces termes sont de trois types :

- les termes où la même lettre est utilisé trois fois $aaa = a^3$ ... Il y a 3 termes de ce type.
- les termes utilisant trois lettres différentes : abc, ... cba. Tous ces termes sont égaux à abc et il y en a $3\times 2 = 6$.
- il reste donc $27-3-6 = 18$ termes. Ce sont les termes utilisant deux lettres distinctes, l'une des deux étant utilisées deux fois, du genre $aab = a^2b$. Les termes du genre a^2b apparaissent 3 fois : aab, aba et baa. Il y a donc $18/3 = 6$ types de termes de ce genre : a^2b, ab^2, ..., c^2b.

Au total

$$\boxed{(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc.}$$

n° 4 Soit n un entier naturel non nul. Le terme général du développement de $(a+b)^n$ est $u_k = \binom{n}{k}a^kb^{n-k}$, $0\leq k\leq n$. Pour $0\leq k\leq n-1$, on a :

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1}a^{k+1}b^{n-k-1}}{\binom{n}{k}a^kb^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b}.$$

Par suite,

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{n-k}{k+1}\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow (n-k)a > (k+1)b \Leftrightarrow k < \frac{na-b}{a+b}.$$

1er cas. Si $\frac{na-b}{a+b} > n-1$ (ce qui équivaut à $n < \frac{a}{b}$), alors la suite $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ est strictement croissante et le plus grand terme est le dernier : a^n.

2ème cas. Si $\frac{na-b}{a+b} \leq 0$ (ce qui équivaut à $n \leq \frac{b}{a}$), alors la suite $(u_k)_{0\leq k\leq n}$ est strictement décroissante et le plus grand terme est le premier : b^n.

3ème cas. Si $0 < \frac{na-b}{a+b} \leq n-1$. Dans ce cas, la suite est strictement croissante puis éventuellement momentanément constante, suivant que $\frac{na-b}{a+b}$ soit un entier ou non, puis strictement décroissante (on dit que la suite u est unimodale). Si $\frac{na-b}{a+b} \notin \mathbb{N}$, on pose $k = E(\frac{na-b}{a+b})+1$, la suite u croit strictement jusqu'à ce rang puis redécroit strictement. Le plus grand des termes est celui d'indice k, atteint une et une seule fois.

Si $\frac{na-b}{a+b} \in \mathbb{N}$, le plus grand des termes est atteint deux fois à l'indice k et à l'indice $k+1$.

n° 5 Pour $n\geq 3$,

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{2} = 5n &\Leftrightarrow n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n\\ &\Leftrightarrow n(-24+3(n-1)+(n-1)(n-2)) = 0 \Leftrightarrow n^2-25 = 0\\ &\Leftrightarrow n = 5.\end{aligned}$$

n° 6

1) Soit $n\geq 3$. (Il ne faut pas écrire $\sum_{i=3}^{n} = \sum_{i=1}^{n} - \sum_{i=1}^{2}$ mais directement (1er terme+dernier terme)×(nombre de termes)/2.)

$$\sum_{i=3}^{n} i = \frac{(3+n)(n-2)}{2} = \frac{(n-2)(n+3)}{2}.$$

(Le suivant est un classique : en additionnant les impairs consécutifs on obtient les carrés $1+3 = 4$, $4+5 = 9$, $9+7 = 16$ ...) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\frac{(1+(2n-1))n}{2}=n^2$$

et

$$\sum_{k=4}^{n+1}(3k+7)=\frac{(19+3n+10)(n-2)}{2}=\frac{1}{2}(3n+29)(n-2)=\frac{1}{2}(3n^2+23n-58).$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=1,\underbrace{11...1}_{n}$. On a

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{10^k}=\frac{1-\dfrac{1}{10^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)=\frac{10}{9}-\frac{1}{9\times 10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{9\times 10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers $\dfrac{10}{9}$.

$$\boxed{1,11111....=\frac{10}{9}.}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=0,\underbrace{99...9}_{n}$. On a

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}=\frac{9}{10}\frac{1-\dfrac{1}{10^n}}{1-\dfrac{1}{10}}=1-\frac{1}{10^n}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{10^n}$ tend vers 0, et donc, u_n tend vers 1.

$$\boxed{0,9999....=1.}$$

3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Posons $u_n=\underbrace{1-1+1-...+(-1)^{n-1}}_{n}$. On a

$$u_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k=\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)}=\frac{1}{2}(1-(-1)^n)=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } n \text{ est pair}\\ 1 \text{ si } n \text{ est impair}\end{array}\right..$$

4) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}\frac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=1.}$$

5) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}&=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\pi/2}\right)\ (=\mathrm{Re}(\sum_{k=0}^{n}i^k))\\&=\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{(n+1)i\pi/2}}{1-e^{i\pi/2}}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)\pi/4}}{e^{i\pi/4}}\frac{-2i\sin\frac{(n+1)\pi}{4}}{-2i\sin\frac{\pi}{4}}\right)=\sqrt{2}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}\cos\frac{n\pi}{4}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{(2n+1)\pi}{4}+\frac{1}{2}=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } n\in 4\mathbb{N}\cup(4\mathbb{N}+1)\\ 0 \text{ si } n\in(4\mathbb{N}+2)\cup(4\mathbb{N}+3)\end{array}\right.\end{aligned}$$

En fait, on peut constater beaucoup plus simplement que $\cos 0+\cos\dfrac{\pi}{2}+\cos\pi+\cos\dfrac{3\pi}{2}=1+0-1+0=0$ et on a immédiatement $S_{4n}=1$, $S_{4n+1}=S_{4n}+0=1$, $S_{4n+2}=S_{4n+1}-1=0$ et $S_{4n+3}=S_{4n+2}+0=0$.

6) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$. Alors, d'après la formule de MOIVRE,

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k.$$

- 1er cas. Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. Par suite,

$$C_n + iS_n = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = e^{i\theta(n+1-1)/2} \frac{-2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = e^{in\theta/2} \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Par suite,

$$C_n = \mathrm{Re}(C_n + iS_n) = \frac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ et } S_n = \mathrm{Im}(C_n + iS_n) = \frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}.$$

- 2ème cas. Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $C_n = n + 1$ et $S_n = 0$.
Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \begin{cases} \dfrac{\cos\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \begin{cases} \dfrac{\sin\dfrac{n\theta}{2}\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}} \text{ si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}.}$$

7) Soient $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque $-x \neq 1$, on a

$$S'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1 - (-x)^n}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x}(1 - (-x)^n).$$

Par suite,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S'_n(t)\ dt = \int_0^x \frac{1 - (-t)^n}{1+t}\ dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}\ dt - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt.$$

Mais alors,

$$|S_n(x) - \ln(1+x)| = \left|\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}\ dt\right| \leq \int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right|\ dt = \int_0^x \frac{t^n}{1+t}\ dt \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\dfrac{1}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in [0, 1],\ \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \ln(1+x).}$$

En particulier,

$$\boxed{\ln 2 = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)}.$$

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - 3 = 2u_n - 6 = 2(u_n - 3)$. La suite $(u_n - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique, de raion $q = 2$ et de premier terme $u_0 - 3 = -2$. On en déduit que, pour n entier naturel donné, $u_n - 3 = -2 \times 2^n$. Donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - 2^{n+1}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} 3 - 2\sum_{k=0}^{n} 2^k = 3(n+1) - 2\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = -2^{n+2} + 3n + 5.$$

n° 7

1) Pour tout entier naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Pour tout naturel non nul k, on a $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Calcul de $\mathbf{S_1}$. Posons $P_1 = aX^2 + bX + c$. On a

$$P_1(X+1) - P_1(X) = a((X+1)^2 - X^2) + b((X+1) - X) = 2aX + (a+b).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_1(X+1) - P_1(X) = X &\Leftrightarrow 2a = 1 \text{ et } a + b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftarrow P_1 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} = \frac{X(X-1)}{2}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} (P_1(k+1) - P_1(k)) = P_1(n+1) - P_1(1) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_2}$. Posons $P_2 = aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$P_2(X+1) - P_2(X) = a((X+1)^3 - X^3) + b((X+1)^2 - X^2) + c((X+1) - X) = 3aX^2 + (3a+2b)X + a + b + c.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_2(X+1) - P_2(X) = X^2 &\Leftrightarrow 3a = 1 \text{ et } 3a + 2b = 0 \text{ et } a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ et } c = \frac{1}{6} \\ &\Leftarrow P_2 = \frac{X^3}{3} - \frac{X^2}{2} + \frac{X}{6} = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (P_2(k+1) - P_2(k)) = P_2(n+1) - P_2(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Calcul de $\mathbf{S_3}$. Posons $P_3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$. On a

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) &= a((X+1)^4 - X^4) + b((X+1)^3 - X^3) + c((X+1)^2 - X^2) + d((X+1) - X) \\ &= 4aX^3 + (6a+3b)X^2 + (4a+3b+2c)X + a + b + c + d. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} P_3(X+1) - P_3(X) = X^3 &\Leftrightarrow 4a = 1,\ 6a + 3b = 0,\ 4a + 3b + 2c = 0 \text{ et } a + b + c + d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4} \text{ et } d = 0 \\ &\Leftarrow P_3 = \frac{X^4}{4} - \frac{X^3}{2} + \frac{X^2}{4} = \frac{X^2(X-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} (P_3(k+1) - P_3(k)) = P_3(n+1) - P_3(1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

- Calcul de S_4. Posons $P_4 = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX + f$. On a

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) &= a((X+1)^5 - X^5) + b((X+1)^4 - X^4) + c((X+1)^3 - X^3) + d((X+1)^2 - X^2)\\ &\quad + e((X+1) - X)\\ &= 5aX^4 + (10a+4b)X^3 + (10a+6b+3c)X^2 + (5a+4b+3c+2d)X + a+b+c+d+e.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}P_4(X+1) - P_4(X) = X^4 &\Leftrightarrow 5a = 1,\ 10a+4b = 0,\ 10a+6b+3c = 0,\ 5a+4b+3c+2d = 0\\ &\quad \text{et } a+b+c+d+e = 0\\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3},\ d = 0 \text{ et } e = -\frac{1}{30}\\ &\Leftarrow P_4 = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30} = \frac{X(X-1)(6X^3 - 9X^2 + X + 1)}{30}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} (P_4(k+1) - P_4(k)) = P_4(n+1) - P_4(1) = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}.$$

$$\boxed{\begin{gathered}\forall n \in \mathbb{N}^*,\\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2\\ \text{et } \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}.\end{gathered}}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que (planche n° 2, exercice n° 7)

$$\boxed{\forall (a,b) \in]0, +\infty[^2,\ \text{Arctan}\, a - \text{Arctan}\, b = \text{Arctan}\, \frac{a-b}{1+ab}.}$$

Soit alors k un entier naturel non nul. On a

$$\text{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1} = \text{Arctan}\, \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}\, k.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\, \frac{1}{k^2+k+1} = \sum_{k=1}^{n} (\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}\, k) = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}\, 1 = \text{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour k entier naturel non nul donné, on a

$$\text{Arctan}\, \frac{2}{k^2} = \text{Arctan}\, \frac{(k+1)-(k-1)}{1+(k-1)(k+1)} = \text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k-1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\, \frac{2}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} (\text{Arctan}(k+1) - \text{Arctan}(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}(k-1)\\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \text{Arctan}\, k - \sum_{k=0}^{n-1} \text{Arctan}\, k = \text{Arctan}(n+1) + \text{Arctan}\, n - \text{Arctan}\, 1 - \text{Arctan}\, 0\\ &= \text{Arctan}(n+1) + \text{Arctan}\, n - \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

n° 8

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Parmi les n^2 couples (i,j) tels que $1 \leq i,j \leq n$, il y en a n tels que $i=j$ et donc $n^2-n=n(n-1)$ tels que $1 \leq i,j \leq n$ et $i \neq j$. Comme il y a autant de couples (i,j) tels que $i>j$ que de couples (i,j) tels que $i<j$, il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ couples (i,j) tels que $1 \leq i<j \leq n$. Finalement,

$$\boxed{\sum_{1\leq i<j\leq n} 1 = \frac{n(n-1)}{2}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = n\sum_{j=1}^{n} j = n \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i<j\leq n} j &= \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}(j-1)j = \sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.\end{aligned}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} ij = \left(\sum_{1\leq i\leq n} i\right)\left(\sum_{1\leq j\leq n} j\right) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{1\leq h,k\leq n} h^2k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\sum_{h=1}^{n} h^2\right) = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)^2.$$

Comme d'autre part, $\displaystyle\sum_{h=1}^{n} h^4 = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$, on a

$$\sum_{1\leq h,k\leq n} h^4 = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{n} h^4\right) = n\sum_{h=1}^{n} h^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30},$$

et bien sûr $\displaystyle\sum_{1\leq h,k\leq n} k^4 = \frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Par suite,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{1}{n^5}\left(2\times 5\frac{n^2(n+1)(6n^3+9n^2+n+14)}{30} - 18\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}\right) \\ &= \frac{1}{n^5}\left(2n^6 - 2n^6 + n^5\left(\frac{15}{3} - \frac{12}{2}\right) + \text{termes de degré au plus } 4\right) \\ &= -1 + \text{termes tendant vers } 0\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.}$$

n° 9

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)}{\prod_{k=1}^{n}k}=\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k}{\prod_{k=1}^{n}k}=n+1$$

2) Soit $a\in]0,\pi[$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, pour tout entier naturel non nul k, on a $0<\frac{a}{2^k}\leq\frac{a}{2}<\frac{\pi}{2}$ et donc $\sin\frac{a}{2^k}\neq 0$.
On sait alors que pour tout réel x, $\sin(2x)=2\sin x\cos x$. Par suite, pour tout entier naturel non nul k,

$$\sin(2\times\frac{a}{2^k})=2\sin\frac{a}{2^k}\cos\frac{a}{2^k}\quad\text{et donc}\quad\cos\frac{a}{2^k}=\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}.$$

Mais alors,

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin(a/2^{k-1})}{2\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^{k-1})}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{1}{2^n}\frac{\prod_{k=0}^{n-1}\sin(a/2^k)}{\prod_{k=1}^{n}\sin(a/2^k)}=\frac{\sin a}{2^n\sin(a/2^n)}.$$

