Planche n° 8. Espaces vectoriels

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (*T) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $f+g$ et $\lambda.f$ usuels) (ne pas hésiter à redémontrer que E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel). Soit F l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'une des conditions suivantes :

1) $f(0)+f(1)=0$ **2)** $f(0)=0$ **3)** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ **4)** $\forall x\in[0,1],\ f(x)+f(1-x)=0$
5) $\forall x\in[0,1],\ f(x)\geq 0$ **6)** $2f(0)=f(1)+3$

Dans quels cas F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

n° 2 : (T)** On munit $\mathbb{R}^n$ des lois produit usuelles. Parmi les sous-ensembles suivants F de $\mathbb{R}^n$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$?

1) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=0\}$ **2)** $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=1\}$
3) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1=x_2\}$ **4)** $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1+...+x_n=0\}$
5) $F=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/\ x_1\times x_2=0\}$

n° 3 : (**) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E vérifiant $A\cap B=A\cap C$, $A+B=A+C$ et $B\subset C$. Montrer que $B=C$.

n° 4 : (T)** Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles (muni des opérations usuelles). On considère les trois éléments de E suivants : $u=(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$, $v=(\cos(n\theta+a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $w=(\cos(n\theta+b))_{n\in\mathbb{N}}$ où θ, a et b sont des réels donnés. Montrer que (u,v,w) est une famille liée.

n° 5 : (T)** Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par $u=(1,2,-5,3)$ et $v=(2,-1,4,7)$. Déterminer λ et μ réels tels que $(\lambda,\mu,-37,-3)$ appartienne à F.

n° 6 : (T)** Montrer que $a=(1,2,3)$ et $b=(2,-1,1)$ engendrent le même sous-espace de $\mathbb{R}^3$ que $c=(1,0,1)$ et $d=(0,1,1)$.

n° 7 : (T)**
1) Vérifier qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $f((1,0,0))=(1,1)$ puis $f((0,1,0))=(0,1)$ et $f((0,0,1))=(-1,1)$. Calculer $f((3,-1,4))$ et $f((x,y,z))$ en général.
2) Déterminer $\mathrm{Ker}f$. En fournir une base. Donner un supplémentaire de $\mathrm{Ker}f$ dans $\mathbb{R}^3$ et vérifier qu'il est isomorphe à $\mathrm{Im}f$.

n° 8 : (I)** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un élément de $\mathscr{L}(E)$.
1) Montrer que $[\mathrm{Ker}f=\mathrm{Ker}f^2\Leftrightarrow\mathrm{Ker}f\cap\mathrm{Im}f=\{0\}]$ et $[\mathrm{Im}f=\mathrm{Im}f^2\Leftrightarrow E=\mathrm{Ker}f+\mathrm{Im}f]$ (où $f^2=f\circ f$).
2) Par définition, un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $p^2=p$.
Montrer que
$$[p\text{ projecteur}\Leftrightarrow Id-p\text{ projecteur}]$$
puis que
$$[p\text{ projecteur}\Rightarrow\mathrm{Im}p=\mathrm{Ker}(Id-p)\text{ et }\mathrm{Ker}p=\mathrm{Im}(Id-p)\text{ et }E=\mathrm{Ker}p\oplus\mathrm{Im}p].$$
3) Soient p et q deux projecteurs, montrer que : $[\mathrm{Ker}p=\mathrm{Ker}q\Leftrightarrow p=p\circ q\text{ et }q=q\circ p]$.
4) p et q étant deux projecteurs vérifiant $p\circ q+q\circ p=0$, montrer que $p\circ q=q\circ p=0$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $p+q$ soit un projecteur lorsque p et q le sont. Dans ce cas, déterminer $\mathrm{Im}(p+q)$ et $\mathrm{Ker}(p+q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}p$, $\mathrm{Ker}q$, $\mathrm{Im}p$ et $\mathrm{Im}q$.

n° 9 : (**) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces de E.
1) Montrer que : $(A\cap B)+(A\cap C)\subset A\cap(B+C)$.
2) A-t-on toujours l'égalité ?
3) Montrer que : $(A\cap B)+(A\cap C)=A\cap(B+(A\cap C))$.

n° 10 : (T)** Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère $V = \{(x, y, z, t) \in E / \ x - 2y = 0$ et $y - 2z = 0\}$ et $W = \{(x, y, z, t) \in E / \ x + z = y + t\}$.

1) Montrer que V et W sont des sous espaces vectoriels de E.
2) Donner une base de V, W et $V \cap W$.
3) Montrer que $E = V + W$.

n° 11 : (***) Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[\times[0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x\cos y, x\sin y) \end{array}$.

1) f est-elle injective ? surjective ?
2) Soient a, b, α et β quatre réels. Montrer qu'il existe $(c, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ a\cos(x - \alpha) + b\cos(x - \beta) = c\cos(x - \gamma)$.
3) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F = \{u \in E / \ \exists(a, b, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = a\cos(x - \alpha) + b\cos(2x - \beta)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
4) Déterminer $\{\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x), 1, \cos^2 x, \sin^2 x\} \cap F$.
5) Montrer que $(\cos x, \sin x, \cos(2x), \sin(2x))$ est une famille libre de F.

n° 12 : (**) Soit C l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissantes sur $\mathbb{R}$.

1) C est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (pour les opérations usuelles) ?
2) Montrer que $V = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \ \exists(g, h) \in C^2$ tel que $f = g - h\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

n° 13 : (**) Montrer que la commutativité de la loi $+$ est une conséquence des autres axiomes de la structure d'espace vectoriel.

n° 14 : (***) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

n° 15 : (IT)** Soient $u = (1, 1, ..., 1)$ et $F = \text{Vect}(u)$ puis $G = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1 + ... + x_n = 0\}$. Montrer que G est unsous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

n° 16 : (****)

1) Soit n un entier naturel. Montrer que si n n'est pas un carré parfait alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
2) Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4\}$. Vérifier que E est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel puis déterminer une base de E.

n° 17 : (*T)** Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, étudier la liberté des familles suivantes A de vecteurs de E :

1) a, b et c étant trois réels donnés, $A = (f_a, f_b, f_c)$ où, pour tout réel x, $f_u(x) = \sin(x + u)$.
2) $A = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ où, pour tout réel x, $f_n(x) = nx + n^2 + 1$.
3) $A = (x \mapsto x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$ (ici $E = (]0; +\infty[)^2$).
4) $A = (x \mapsto |x - a|)_{a\in\mathbb{R}}$.

n° 18 : (****) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$.

1) Montrer que $[\text{Ker}v \subset \text{Ker}u \Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ u = w \circ v]$.
2) En déduire que $[v$ injectif $\Leftrightarrow \exists w \in \mathscr{L}(E) / \ w \circ v = Id_E]$.

n° 19 : (***) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

1) Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & P' \end{array}$. f est-elle linéaire, injective, surjective ? Fournir un supplémentaire de $\text{Ker}f$.
2) Mêmes questions avec $g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^x P(t)\ dt \end{array}$.