

Planche n° 9. Dimensions. Espaces vectoriels de dimension finie

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Dans cette planche, la lettre \mathbb{K} désigne toujours un sous-corps de \mathbb{C} , comme \mathbb{Q} , \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

n° 1 : (IT)** E désigne l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 (muni des opérations usuelles). On considère les vecteurs $e_1 = (1, 2, 3, 4)$, $e_2 = (1, 1, 1, 3)$, $e_3 = (2, 1, 1, 1)$, $e_4 = (-1, 0, -1, 2)$ et $e_5 = (2, 3, 0, 1)$. Soient alors $F = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ et $G = \text{Vect}(e_4, e_5)$. Quelles sont les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$?

n° 2 : (IT)** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E . Déterminer $\dim_{\mathbb{K}}(H_1 \cap H_2)$. Interprétez le résultat quand $n = 2$ ou $n = 3$.

n° 3 : ()** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E vérifiant $E = \text{Ker}f + \text{Ker}g = \text{Im}f + \text{Im}g$. Montrer que ces sommes sont directes.

n° 4 : (I)** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (n entier naturel donné). Soit φ l'application définie par : $\forall P \in E, \varphi(P) = P(X+1) - P(X)$.
 1) Vérifier que φ est un endomorphisme de E .
 2) Déterminer $\text{Ker}\varphi$ et $\text{Im}\varphi$.

n° 5 : (T)** Soient $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique de \mathbb{R}^4 et f l'endomorphisme de \mathbb{R}^4 défini par : $f(e_1) = 2e_1 + e_3$, $f(e_2) = -e_2 + e_4$, $f(e_3) = e_1 + 2e_3$ et $f(e_4) = e_2 - e_4$. Déterminer $\text{Ker}f$ et $\text{Im}f$.

n° 6 : ()** Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ où a est un nombre complexe donné non nul.
 $z \mapsto z + a\bar{z}$

Montrer que f est un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . f est-il un endomorphisme du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C} ? Déterminer le noyau et l'image de f .

n° 7 : ()** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f((x, y)) = (x', y')$.
 1) Rappeler l'écriture générale de (x', y') en fonction de (x, y) .
 2) Si on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (où $i^2 = -1$), montrer que : $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2 / \forall z \in \mathbb{C}, z' = az + b\bar{z}$.
 3) Réciproquement, montrer que l'expression ci-dessus définit un unique endomorphisme de \mathbb{R}^2 (en clair, l'expression complexe d'un endomorphisme de \mathbb{R}^2 est $z' = az + b\bar{z}$).

n° 8 : (I)** Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions finies sur \mathbb{K} et u et v deux applications linéaires de E dans F . Montrer que : $|\text{rg}u - \text{rg}v| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}u + \text{rg}v$.

n° 9 : (*)** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .
 1) Montrer que, pour tout endomorphisme f de \mathbb{R}^2 , on a :

$$(\text{Ker}f = \text{Im}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } n = 2\text{rg}f) \Leftrightarrow (f^2 = 0 \text{ et } \exists g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E).$$

2) On suppose $\text{Ker}f = \text{Im}f$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_p)$ de E telle que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, f(u_i) = 0 \text{ et } f(v_i) = u_i.$$

n° 10 : (*) (Le théorème des noyaux itérés)** Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et f un endomorphisme de E non injectif. Pour k entier naturel donné, on pose $N_k = \text{Ker}f^k$ et $I_k = \text{Im}f^k$ (avec la convention $f^0 = \text{Id}_E$).

- 1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, (N_k \subset N_{k+1} \text{ et } I_{k+1} \subset I_k)$.
- 2) a) Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}, (N_k = N_{k+1} \Rightarrow N_{k+1} = N_{k+2}))$.
 b) Montrer que : $\exists p \in \mathbb{N} / \forall k \in \mathbb{N}, (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1})$.
 c) Montrer que $p \leq n$.
- 3) Montrer que si $k < p, I_k = I_{k+1}$ et si $k \geq p, I_k = I_{k+1}$.

- 4) Montrer que $E = I_p \oplus N_p$ et que f induit un automorphisme de I_p .
- 5) Soit $d_k = \dim I_k$. Montrer que la suite $(d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (en d'autres termes la suite des images itérées I_k décroît de moins en moins vite).

n° 11 : (I)** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie notée n . Soit u un endomorphisme de E . On dit que u est nilpotent si et seulement si $\exists k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0$ et on appelle alors indice de nilpotence de u le plus petit de ces entiers k (par exemple, le seul endomorphisme u , nilpotent d'indice 1 est 0).

- 1) Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice p . Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ soit libre.
- 2) Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrer que $u^n = 0$.
- 3) On suppose dans cette question que u est nilpotent d'indice n . Déterminer $\text{rg } u$.

n° 12 : (I)** Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque sur \mathbb{K} et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 - 5f + 6\text{Id}_E = 0$. Montrer que $E = \text{Ker}(f-2\text{Id}) \oplus \text{Ker}(f-3\text{Id})$.