Planche n° 9. Dimensions. Espaces vectoriels de dimension finie. Corrigé

n° 1 : • e_4 et e_5 ne sont clairement pas colinéaires. Donc (e_4, e_5) est une famille libre et dim $G = \text{rg}\ (e_4, e_5) = 2$.
Ensuite, puisque e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, on a $2 \leq \dim F \leq 3$.
Soit alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = 0 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = 0 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 0 & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0\ ((3) - (2)) \\ \nu - \lambda = 0\ ((1) - (2)) \\ \lambda + \mu + 2\nu = 0\ (1) \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0.$$

On a montré que : $\forall (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3,\ (\lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3 = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0)$.
(e_1, e_2, e_3) est donc libre et dim $F = \text{rg}\ (e_1, e_2, e_3) = 3$.

• Comme $F \subset F + G$, dim $(F + G) \geq 3$ ou encore dim $(F + G) = 3$ ou 4. De plus :

$$\dim\ (F + G) = 3 \Leftrightarrow F = F + G \Leftrightarrow G \subset F \Leftrightarrow \{e_4, e_5\} \subset F.$$

On cherche alors $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_4 = \lambda e_1 + \mu e_2 + \nu e_3$ ce qui fournit le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + 2\nu = -1 & (1) \\ 2\lambda + \mu + \nu = 0 & (2) \\ 3\lambda + \mu + \nu = -1 & (3) \\ 4\lambda + 3\mu + \nu = 2 & (4) \end{cases}.$$

$(3) - (2)$ fournit $\lambda = -1$ puis $(1) - (2)$ fournit $\nu = -2$ puis (2) fournit $\mu = 4$.
Maintenant, (4) n'est pas vérifiée car $4 \times (-1) + 3 \times 4 - 2 = 6 \neq 2$. Le système proposé n'admet pas de solution et donc $e_4 \notin \text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = F$. Par suite, dim $(F + G) = 4$.

Enfin,

$$\dim\ (F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim\ (F + G) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

$$\boxed{\dim(F) = 3,\ \dim(G) = 2,\ \dim(F + G) = 4 \text{ et } \dim(F \cap G) = 1.}$$

n° 2 : On a $H_1 \subset H_1 + H_2$ et donc dim $(H_1 + H_2) \geq n - 1$ ou encore dim $(H_1 + H_2) \in \{n - 1, n\}$. Donc

$$\dim\ (H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim\ (H_1 + H_2) = \begin{cases} (n - 1) + (n - 1) - (n - 1) = n - 1 \\ \quad \text{ou} \\ (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2 \end{cases}.$$

Maintenant, si dim $(H_1 + H_2) = n - 1 = \dim H_1 = \dim H_2$, alors $H_1 = H_1 + H_2 = H_2$ et donc en particulier, $H_1 = H_2$.
Réciproquement, si $H_1 = H_2$ alors $H_1 + H_2 = H_1$ et dim $(H_1 + H_2) = n - 1$.

En résumé, si H_1 et H_2 sont deux hyperplans distincts, dim $(H_1 \cap H_2) = n - 2$ et bien sûr, si $H_1 = H_2$, alors dim $(H_1 \cap H_2) = n - 1$.

Si $n = 2$, les hyperplans sont des droites vectorielles et l'intersection de deux droites vectorielles distinctes du plan vectoriel est de dimension 0, c'est-à-dire réduite au vecteur nul.
Si $n = 3$, les hyperplans sont des plans vectoriels et l'intersection de deux plans vectoriels distincts de l'espace de dimension 3 est une droite vectorielle.

n° 3 : On a

$$n = \dim E = \dim\ (\text{Ker } f + \text{Ker } g) = \dim\ (\text{Ker } f) + \dim\ (\text{Ker } g) - \dim\ (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g),$$

mais aussi,

$$n = \dim\ (\text{Im } f) + \dim\ (\text{Im } g) - \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 2n - \dim \text{Ker } f - \dim\ (\text{Ker } g) - \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g).$$

Par suite,

$$n + \dim\ (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim\ (\text{Ker } f) + \dim \text{Ker } g = n - \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g)$$

puis $n + \dim\ (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = n - \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g) \Rightarrow \dim\ (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) + \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$ ou encore $\dim\ (\text{Ker } f \cap \text{Ker } g) = \dim\ (\text{Im } f \cap \text{Im } g) = 0$, et finalement, $\text{Ker } f \cap \text{Ker } g = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0\}$. Ceci montre que les sommes proposées sont directes.

n° 4 : **1)** Si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $P(X+1) - P(X)$ est encore un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Par suite, φ est bien une application de E dans lui-même.
Soient alors $(P, Q) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) = \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).\end{aligned}$$

φ est linéaire de E vers lui-même et donc un endomorphisme de E.

2) Soit $P \in E$.
$P \in \text{Ker } \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = P(x)$. Montrons alors que P est constant.
Soit $Q = P - P(0)$. Q est un polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en les entiers naturels 0, 1, 2,... (car $P(0) = P(1) = P(2) = ...$) et a ainsi une infinité de racines deux à deux distinctes. Q est donc le polynôme nul ou encore $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(0)$. Par suite, P est un polynôme constant.
Réciproquement, les polynômes constants sont clairement dans Ker φ et donc

$$\text{Ker } \varphi = \{\text{polynômes constants}\} = \mathbb{R}_0[X].$$

Pour déterminer Im φ, on note tout d'abord que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, alors $\varphi(P) = P(X+1) - P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. En effet, si $P = a_n X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ (avec a_n quelconque, éventuellement nul) alors

$$\begin{aligned}\varphi(P) &= a_n((X+1)^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= a_n(X^n - X^n) + \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1 \\ &= \text{termes de degré inférieur on égal à } n-1.\end{aligned}$$

Donc, Im $(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Mais d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Im } (\varphi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim \text{Ker } (\varphi) = (n+1) - 1 = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] < +\infty,$$

et donc Im $\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. (On peut noter que le problème difficile « soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q$? » a été résolu simplement par le théorème du rang.)

n° 5 : Soit $u = (x, y, z, t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. Alors,

$$\begin{aligned}f(u) &= xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) + tf(e_4) = x(2e_1 + e_3) + y(-e_2 + e_4) + z(e_1 + 2e_3) + t(e_2 - e_4) \\ &= (2x + z)e_1 + (-y + t)e_2 + (x + 2z)e_3 + (y - t)e_4.\end{aligned}$$

Par suite,

$$u \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ -y + t = 0 \\ x + 2z = 0 \\ y - t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = z = 0 \\ y = t \end{array}\right. .$$

Donc, $\text{Ker } f = \{(0, y, 0, y),\ y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0, 1, 0, 1))$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}((0, 1, 0, 1)).}$$

Soit $u' = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^4$.

$$u' = (x', y', z', t') \in \text{Im } f \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} 2x + z = x' \\ -y + t = y' \\ x + 2z = z' \\ y - t = t' \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3}(2x' - z') \\ z = \frac{1}{3}(-x' + 2z') \\ t = y + y' \\ y' + t' = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y' = -t'$$

(si $y' \neq -t'$, le système ci-dessus, d'inconnues x, y, z et t, n'a pas de solution et si $y' = -t'$, le système ci-dessus admet au moins une solution comme par exemple $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}(2x' - z'), 0, \frac{1}{3}(-x' + 2z'), y'\right)$.

Donc, $\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ y + t = 0\} = \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{xe_1 + y(e_2 - e_4) + ze_3, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3)$.

$$\boxed{\text{Im } f == \{(x, y, z, -y)/(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(e_1, e_2 - e_4, e_3).}$$

Autre solution pour la détermination de Im f.
$\text{Im } f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, -e_2 + e_4, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4) = \text{Vect}(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$. Mais d'autre part, d'après le théorème du rang, $\dim (\text{Im } f) = 4 - 1 = 3$. Donc, $(2e_1 + e_3, e_1 + 2e_3, e_2 - e_4)$ est une base de Im f.

n° 6 : Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(\lambda z + \mu z') = (\lambda z + \mu z') + a(\overline{\lambda z + \mu z'}) = \lambda(z + a\overline{z}) + \mu(z' + a\overline{z'}) = \lambda f(z) + \mu f(z').$$

f est donc $\mathbb{R}$-linéaire. On note que $f(ia) = i(a - |a|^2)$ et que $if(a) = i(a + |a|^2)$. Comme $a \neq 0$, on a $f(ia) \neq if(a)$. f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Posons $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

$$z \in \text{Ker } f \Leftrightarrow z + a\overline{z} = 0 \Leftrightarrow e^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 0 \Leftrightarrow e^{2i\theta} = -a.$$

1er cas. Si $|a| \neq 1$, alors, pour tout réel θ, $e^{2i\theta} \neq -a$. Dans ce cas, $\text{Ker } f = \{0\}$ et d'après le théorème du rang, $\text{Im } f = \mathbb{C}$.
2ème cas. Si $|a| = 1$, posons $a = e^{i\alpha}$.

$$e^{2i\theta} = -a \Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{i(\alpha+\pi)} \Leftrightarrow 2\theta \in \alpha + \pi + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\alpha + \pi}{2} + \pi\mathbb{Z}.$$

Dans ce cas, $\text{Ker } f = \text{Vect}(e^{i(\alpha+\pi)/2})$. D'après le théorème du rang, Im f est une droite vectorielle et pour déterminer Im f, il suffit d'en fournir un vecteur non nul, comme par exemple $f(1) = 1 + a$. Donc, si $a \neq -1$, $\text{Im } f = \text{Vect}(1 + a)$. Si $a = -1$, $\forall z \in \mathbb{C}, \ f(z) = z - \overline{z} = 2i\text{Im } (z)$ et $\text{Im } f = i\mathbb{R}$.

n° 7 : **1)** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f((x, y)) = (x', y')$.

$$f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 / \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \left\{\begin{array}{l} x' = \alpha x + \gamma y \\ y' = \beta x + \delta y \end{array}\right. .$$

2) Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (\alpha x + \gamma y) + i(\beta x + \delta y) = (\alpha\frac{z + \overline{z}}{2} + \gamma\frac{z - \overline{z}}{2i}) + i(\beta\frac{z + \overline{z}}{2} + \delta\frac{z - \overline{z}}{2i}) \\ &= \left(\frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}\right) z + \left(\frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \overline{z} = az + b\overline{z} \end{aligned}$$

où $a = \frac{\alpha + \delta}{2} + i\frac{\beta - \gamma}{2}$ et $b = \frac{\alpha - \delta}{2} + i\frac{\beta + \gamma}{2}$.

3) Réciproquement, si $z' = az + b\overline{z}$, en posant $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$ où $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$x' + iy' = (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) = (a_1 + b_1)x + (-a_2 + b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y)$$

et donc,

$$\left\{\begin{array}{l} x' = (a_1 + b_1)x + (b_2 - a_2)y \\ y' = (a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y \end{array}\right. .$$

n° 8 : Par définition, rg $(u+v) = \dim\ (\text{Im}\ (u+v))$.

$$\text{Im}\ (u+v) = \{u(x)+v(x),\ x \in E\} \subset \{u(x)+v(y),\ (x,y) \in E^2\} = \text{Im}\ u + \text{Im}\ v.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\text{rg}(u+v) &= \dim\ (\text{Im}\ (u+v))\\ &\leq \dim\ (\text{Im}\ u + \text{Im}\ v) = \dim\ (\text{Im}\ u) + \dim\ (\text{Im}\ v) - \dim\ (\text{Im}\ u \cap\ \text{Im} v)\\ &\leq \dim\ (\text{Im}\ u) + \dim\ (\text{Im}\ v) = \text{rg}\ u + \text{rg}\ v.\end{aligned}$$

On a montré que :

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathscr{L}(E,F))^2,\ \text{rg}\ (u+v) \leq \text{rg}\ u + \text{rg}\ v.}$$

Ensuite,

$$\text{rg}\ u = \text{rg}\ (u+v-v) \leq \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ (-v) = \text{rg}\ (u+v) + \text{rg}\ v,$$

(il est clair que $\text{Im}\ (-v) = \text{Im}\ v$) et donc $\text{rg}\ u - \text{rg}\ v \leq \text{rg}\ (u+v)$. En échangeant les rôles de u et v, on a aussi $\text{rg}\ v - \text{rg}\ u = \text{rg}\ (u+v)$ et finalement

$$\boxed{\forall (u,v) \in (\mathcal{L}(E,F))^2,\ |\text{rg}\ u - \text{rg}\ v| \leq \text{rg}\ (u+v).}$$

n° 9 : 1)

• **(1)⇒(2).** Si $\text{Ker}\ f = \text{Im}\ f$, alors pour tout élément x de E, $f(x)$ est dans $\text{Im}\ f = \text{Ker}\ f$ et donc $f(f(x)) = 0$. Par suite, $f^2 = 0$. De plus, d'après le théorème du rang, $n = \dim\ (\text{Ker}\ f) + \text{rg}\ f = 2\ \text{rg}\ f$ ce qui montre que n est nécessairement pair et que $\text{rg}\ f = \dfrac{n}{2}$.

• **(2)⇒(3).** Si $f^2 = 0$ et $n = 2\ \text{rg}\ f\ (\in 2\mathbb{N})$, cherchons un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$.
Posons $r = \text{rg}\ f$ et donc $n = 2r$, puis $F = \text{Ker}\ f = \text{Im}\ f$ ($\dim F = r$).

Soit G un supplémentaire de F dans E ($\dim G = r$). Soit $(e'_1, ..., e'_r)$ une base de G. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on pose $e_i = f(e'_i)$. Montrons que la famille $(e_1, ..., e_r)$ est libre. Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$.

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda e'_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i \in \text{Ker}\ f \cap G = \{0\} \Rightarrow \forall i \in \{1, ..., r\},\ \lambda_i = 0,$$

car la famille $(e'_i)_{1\leq i\leq r}$ est libre. $(e_1, ..., e_r)$ est une famille libre de $F = \text{Im}\ f$ de cardinal r et donc une base de $F = \text{Ker}\ f = \text{Im}\ f$. Au passage, puisque $E = F \oplus G$, $(e_1, ..., e_r, e'_1, ..., e'_r)$ est une base de E.

Soit alors g l'endomorphisme de E défini par les égalités : $\forall i \in [\![1,r]\!],\ g(e_i) = e'_i$ et $g(e'_i) = e_i$ (g est entièrement déterminé par les images des vecteurs d'une base de E). Pour i élément de $[\![1,r]\!]$, on a alors :

$$(f \circ g + g \circ f)(e_i) = f(e'_i) + g(0) = e_i + 0 = e_i,$$

et

$$(f \circ g + g \circ f)(e'_i) = f(e_i) + g(e_i) = 0 + e'_i = e'_i.$$

Ainsi, les endomorphismes $f \circ g + g \circ f$ et Id_E coïncident sur une base de E et donc $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$.

• **(3)⇒(1).** Supposons que $f^2 = 0$ et qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g + g \circ f = \text{Id}_E$. Comme $f^2 = 0$, on a déjà $\text{Im}\ f \subset \text{Ker}\ f$. D'autre part, si x est un élément de $\text{Ker}\ f$, alors $x = f(g(x)) + g(f(x)) = f(g(x)) \in \text{Im}\ f$ et on a aussi $\text{Ker}\ f \subset \text{Im}\ f$. Finalement, $\text{Ker}\ f = \text{Im}\ f$.

2) L'existence d'une base $(e_1, ..., e_p, e'_1, ..., e'_p)$ de E vérifiant les conditions de l'énoncé a été établie au passage (avec $p = r = \text{rg}\ f$).

n° 10 : 1) Soient k un entier naturel et x un élément de E.

$$x \in N_k \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1}$. Ensuite,

$$x \in I_{k+1} \Rightarrow \exists y \in E/\ x = f^{k+1}(y) \Rightarrow \exists z (= f(y)) \in E/\ x = f^k(z) \Rightarrow x \in I_k.$$

On a montré que : $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ N_k \subset N_{k+1} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} \subset I_k.}$$

2) a) Soit k un entier naturel. Supposons que $N_k = N_{k+1}$. On a déjà $N_{k+1} \subset N_{k+2}$. Montrons que $N_{k+2} \subset N_{k+1}$.
Soit x un élément de E.

$$\begin{aligned} x \in N_{k+2} &\Rightarrow f^{k+2}(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in N_{k+1} = N_k \Rightarrow f^k(f(x)) = 0 \\ &\Rightarrow f^{k+1}(x) = 0 \Rightarrow x \in N_{k+1}. \end{aligned}$$

b) On a $\{0\} = N_0 \subset N_1 \subset N_2$... Supposons que chacune de ces inclusions soient strictes. Alors, $0 = \text{dim } N_0 < \text{dim } N_1 < \text{dim } N_2$... Donc $\text{dim } N_1 \geq 1$, $\text{dim } N_2 \geq 2$ et par une récurrence facile, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\text{dim } N_k \geq k$. En particulier, $\text{dim } N_{n+1} \geq n+1 > n = \text{dim } E$, ce qui est impossible. Donc, il existe un entier naturel k tel que $N_k = N_{k+1}$.
Soit $K =\in \{k \in \mathbb{N}/\ N_k = N_{k+1}\}$. K est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément que l'on note p. Puisque f est non injectif, $\{0\} = N_0 \underset{\neq}{\subset} N_1$ et donc $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p, pour $k < p$, $N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1}$ et, d'après le a) et puisque $N_p = N_{p+1}$, on montre par récurrence que pour $k = p$, on a $N_k = N_p$.

$$\boxed{\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \ (k < p \Rightarrow N_k \neq N_{k+1} \text{ et } k \geq p \Rightarrow N_k = N_{k+1}.}$$

Remarque. L'hypothèse « $\dim(E) < +\infty$ » est essentielle pour assurer l'existence de p. Par exemple, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à un polynôme P associe P'. Alors $N_0 = \{0\}$, $N_1 = \mathbb{R}_0[X]$, $N_2 = \mathbb{R}_1[X]$, ..., $N_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ... et donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \underset{\neq}{\subset} N_{k+1}$.

c) $0 < \text{dim } N_1 < ... < \text{dim } N_p$ montre que pour $k \leq p$, on a $\text{dim } N_k \geq k$ et en particulier $p \leq \text{dim } N_p = n$.

$$\boxed{p \leq n.}$$

3) Puisque $N_k \subset N_{k+1}$, que $I_{k+1} \subset I_k$ et que $\text{dim } E < +\infty$, on a :

$$N_k = N_{k+1} \Leftrightarrow \text{dim } N_k = \text{dim } N_{k+1} \Leftrightarrow n - \text{rg } (f^k) = n - \text{rg } (f^{k+1}) \Leftrightarrow \text{dim } (I_k) = \text{dim } (I_{k+1}) \Leftrightarrow I_k = I_{k+1}.$$

Donc, pour $k < p$, $I_k \underset{\neq}{\subset} I_{k+1}$ et pour $k \geq p$, $I_k = I_{k+1}$.

4) Soit $x \in I_p \cap N_p$. Alors, $f^p(x) = 0$ et $\exists y \in E/\ x = f^p(y)$. D'où, $f^{2p}(y) = 0$ et $y \in N_{2p} = N_p$ (puisque $2p \geq p$) et donc $x = f^p(y) = 0$. On a montré que $I_p \cap N_p = \{0\}$. Maintenant, le théorème du rang montre que $E = \text{dim } (I_p) + \text{dim } (N_p)$ et donc $E = I_p \oplus N_p$.

Posons $f_{/I_p} = f'$. f' est un endomorphisme de I_p, surjectif, car

$$\text{Im} f' = f'(I_p) = f(I_p) = I_{p+1} = I_p.$$

Puisque $\text{dim } I_p < +\infty$, on sait alors que $f' \in \mathscr{GL}(I_p)$.

5) Soient k un entier naturel et g_k la restriction de f à I_k.
D'après le théorème du rang, $d_k = \text{dim } (I_k) = \text{dim } (\text{Ker } g_k) + \text{dim } (\text{Im } g_k)$. Maintenant, $\text{Im } g_k = g_k(I_k) = f(I_k) = I_{k+1}$ et donc $\text{dim } (\text{Im } g_k) = d_{k+1}$. D'autre part, $\text{Ker } g_k = \text{Ker } f_{/I_k} = \text{Ker } f \cap I_k$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, $d_k - d_{k+1} = \text{dim } (\text{Ker } f \cap I_k)$. Puisque la suite $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, la suite d'entiers naturels $(\text{dim } (\text{Ker } f \cap I_k))_{k \in \mathbb{N}} = (d_k - d_{k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

n° 11 : 1) Soit $p (\in \mathbb{N}^*)$ l'indice de nilpotence de u.
Par définition, $u^{p-1} \neq 0$ et plus généralement, pour $1 \leq k \leq p-1$, $u^k \neq 0$ car si $u^k = 0$ alors $u^{p-1} = u^k \circ u^{p-1-k} = 0$ ce qui n'est pas.

Puisque $u^{p-1} \neq 0$, il existe au moins un vecteur x non nul tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Soit x un tel vecteur.
Montrons que la famille $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est libre.

Soit $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = 0$. Supposons qu'au moins un des coefficients λ_k ne soit pas nul. Soit $i = \text{Min } \{k \in \{0, ..., p-1\}/\ \lambda_k \neq 0\}$.

$$\sum_{k=0}^{p-1}\lambda_k u^k(x)=0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1}\lambda_k u^k(x)=0 \Rightarrow u^{p-1-i}\left(\sum_{k=i}^{p-1}\lambda_k u^k(x)\right)=0 \Rightarrow \sum_{k=i}^{p-1}\lambda_k u^{p-1-i+k}(x)=0$$
$$\Rightarrow \lambda_i u^{p-1}(x)=0 \quad (\text{car pour } k\geq i+1,\ p-1-i+k\geq p \text{ et donc } u^{p-1-i+k}=0)$$
$$\Rightarrow \lambda_i=0 \quad (\text{car } u^{p-1}(x)\neq 0).$$

Ceci contredit la définition de i et donc tous les coefficients λ_k sont nuls.K On a montré que la famille $(u^k(x))_{0\leq k\leq p-1}$ est libre.

2) Le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal à la dimension de l'espace et donc $p\leq n$.
Par suite, $u^n=u^p\circ u^{n-p}=0$.
3) On applique le n° 10 (mais on peut aussi refaire le raisonnement du n° 10 dans cette situation particulière).
Puisque $u^{n-1}\neq 0$, on a $N_{n-1}\underset{\neq}{\subset} N_n$. Par suite (d'après le n°10, 2)), les inclusions $N_0\subset N_1\subset ...\subset N_n=E$ sont toutes strictes et donc

$$0<\dim N_1<\dim N_2...<\dim N_n=n.$$

Pour $k\in [\![0,n]\!]$, notons d_k est la dimension de N_k. Pour $k\in [\![0,n-1]\!]$, on a $d_{k+1}\geq d_k$ et une récurrence facile montre que, pour $k\in [\![0,n]\!]$, on a $d_k\geq k$.
Mais si de plus, pour un certain indice i élément de $[\![0,n-1]\!]$, on a $d_i=\dim N_i>i$, alors, par une récurrence facile, pour $i\leq k\leq n$, on a $d_k>k$ et en particulier $d_n>n$ ce qui n'est pas. Donc,

$$\forall k\in [\![0,n]\!],\ \dim(N_k)=k,$$

ou encore, d'après le théorème du rang, $\forall k\in [\![0,n]\!]$, $\text{rg}(u^k)=n-k$, et en particulier $\text{rg}(u)=n-1$.

$$\boxed{\text{rg}(u)=n-1.}$$

n° 12 : Soit $x\in E$.

$$x\in \text{Ker}(f-2Id)\cap \text{Ker}(f-3Id)\Rightarrow f(x)=2x \text{ et } f(x)=3x\Rightarrow 3x-2x=f(x)-f(x)=0\Rightarrow x=0.$$

Donc, $\text{Ker}(f-2Id)\cap\text{Ker}(f-3Id)=\{0\}$ (même si $f^2-5f+6Id\neq 0$).

Soit $x\in E$. On cherche y et z tels que $y\in\text{Ker}(f-2Id)$, $z\in\text{Ker}(f-3Id)$ et $x=y+z$.

• Si y et z existent, y et z sont solution du système $\left\{\begin{array}{l}y+z=x\\2y+3z=f(x)\end{array}\right.$ et donc $\left\{\begin{array}{l}y=3x-f(x)\\z=f(x)-2x\end{array}\right.$.

• Réciproquement . Soient $x\in E$ puis $y=3x-f(x)$ et $z=f(x)-2x$. On a bien $y+z=x$ puis

$$\begin{aligned}f(y)&=3f(x)-f^2(x)=3f(x)-(5f(x)-6x)\quad(\text{car } f^2=5f-6Id)\\&=6x-2f(x)=2(3x-f(x))=2y\end{aligned}$$

et $y\in\text{Ker}(f-2Id)$. De même,

$$f(z)=f^2(x)-2f(x)=(5f(x)-6x)-2f(x)=3(f(x)-2x)=3z,$$

et $z\in\text{Ker}(f-3Id)$. On a montré que $E=\text{Ker}(f-2Id)+\text{Ker}(f-3d)$, et finalement que

$$\boxed{E=\text{Ker}(f-2Id)\oplus\text{Ker}(f-3d).}$$