# Planche n° 10. Géométrie du plan

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

Sauf mention explicite du contraire, dans ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

**n° 1 : (**I)** $ABC$ est un vrai triangle.

**1)** Montrer que ses médianes sont concourantes en $G$ l'isobarycentre de $(ABC)$.
**2)** Montrer que ses médiatrices sont concourantes en $O$ le centre du cercle circonscrit à $(ABC)$.
**3)** Montrer que ses hauteurs sont concourantes en $H$ l'orthocentre de $(ABC)$ puis montrer la relation d'Euler : $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ (considérer l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-2$).
**4)** Montrer que ses bissectrices (intérieures) sont concourantes en $I$ le centre du cercle inscrit.

**n° 2 : (**IT)** On donne les points $A(1,2)$, $B(-2,1)$ et $C(0,4)$.

1) Déterminer $\widehat{BAC}$ au degré près.
2) Déterminer l'aire du triangle $(ABC)$.
3) Déterminer son isobarycentre, son orthocentre, le centre de son cercle circonscrit puis une équation de ce cercle.
4) Déterminer une équation des bissectrices de l'angle $\widehat{BAC}$ puis de la bissectrice intérieure à l'angle $\widehat{A}$.

**n° 3 : (*IT)** Déterminer le projeté orthogonal du point $M(x_0, y_0)$ sur la droite $(D)$ d'équation $x + 3y - 5 = 0$ ainsi que son symétrique orthogonal.

**n° 4 : (*)** Soit $(ABDC)$ un parallélogramme. Déterminer les coordonnées de $D$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

**n° 5 : (**)** Soit $(E)$ l'ensemble d'équation cartésienne $2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0$. Montrer que $(E)$ est une réunion de deux droites. Déterminer l'aire du parallélogramme formé par ces deux droites et les parallèles à ces deux droites passant par $O$.

**n° 6 : (**)** Déterminer un cercle tangent aux trois droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $y = 2x + 7$ et $y = -\frac{1}{2}x$.

**n° 7 : (**I)**

**1)** $h$ (resp. $h'$) est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ (resp. $k'$) non nul. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h' \circ h$.
**2)** $s$ (resp. $s'$) est la symétrie centrale de centre $\Omega$ (resp. $\Omega'$). Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
**3)** $s$ est la symétrie centrale de centre $\Omega$ et $t$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ s$.

**n° 8 : (***I)** Soient $n$ un entier supérieur ou égal à 2, puis $A_1$, $A_2$,..., $A_n$ $n$ points du plan. Existe-t-il $n$ points $B_1$, $B_2$,..., $B_n$ tels que, pour $i \in \{1, ..., n\}$, $A_i$ soit le milieu de $[B_i, B_{i+1}]$ (avec la convention $B_{n+1} = B_1$) ? (Utiliser le n° 7.)

**n° 9 : (*T)** Soit $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

**1)** Déterminer une équation de la tangente au point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(2, -2 + \sqrt{3})$.
**2)** Déterminer l'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre $(1, 0)$ et de rayon 2.

**n° 10 : (***) (Théorème de Ménélaüs)** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés. Soient $M$, $N$ et $P$ trois points appartenant respectivement aux droites $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ et distincts de $A$, $B$ et $C$. Montrer que :

$$(M,\ N,\ \text{et } P \text{ sont alignés}) \Leftrightarrow \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1\right).$$

(Trouver une démonstration utilisant le théorème de Thalès, une utilisant la composée de deux homothéties et une utilisant des coordonnées.)

**nº 11 : (***)** Construire l'ensemble des points $M$ de coordonnées polaires $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$r = \frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)}}$$

(commencer par étudier toutes les symétries de l'ensemble considéré).

**nº 12 : (**I)** Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets appartiennent aux points d'intersection des lignes d'une feuille blanche quadrillée usuelle.

**nº 13 : (*T)** Nature et éléments caractéristiques de la transformation d'expression complexe :
1) $z' = z + 3 - i$
2) $z' = 2z + 3$
3) $z' = iz + 1$
4) $z' = (1-i)z + 2 + i$

**nº 14 : (**)** (Faisceaux de droites)

**1)** Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites sécantes d'équation respectives $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$, $(a,b) \neq (0,0)$, $(a',b') \neq (0,0)$. Soit $(\Delta)$ une droite. Montrer que $(D)$, $(D')$ et $(\Delta)$ sont concourantes si et seulement si il existe $(\Delta)$ a une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

**2)** Equation cartésienne de la droite passant par le point $(1,0)$ et par le point d'intersection des droites d'équations respectives $5x+7y+1=0$ et $-3x+2y+1=0$

**3)** Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère $(D_m)$ la droite d'équation $(2m-1)x + (m+1)y - 4m - 1 = 0$. Montrer que les droites $(D_m)$ sont concourantes en un point $A$ que l'on précisera. Toute droite passant par $A$ est-elle une droite $(D_m)$ ?

  