Planche n° 10. Géométrie du plan. Corrigé

n° 1 : **1)** Soit G l'isobarycentre du triangle (ABC). On a donc $G = \text{bar}(A(1), B(1), C(1))$. Notons A', B' et C' les milieux respectifs des côtés $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$. D'après le théorème du barycentre partiel, $G = \text{bar}(A(1), A'(2))$. En particulier, G est sur la médiane (AA'). De même, G est sur la médiane (BB') et sur la médiane (CC').

Finalement, G est sur les trois médianes. les trois médianes sont donc concourantes en G.

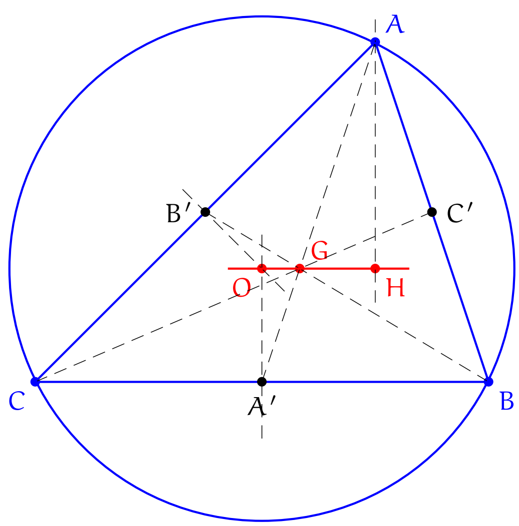
2) Les droites (BC) et (CA) ne sont pas parallèles. Par suite, les médiatrices respectives des côtés $[BC]$ et $[CA]$ ne sont pas parallèles. Elles sont donc sécantes en un point que l'on note O. Par définition de O, on a $OA = OB = OC$. O est donc à égale distance de A et B et est ainsi sur la médiatrice de $[A, B]$. Finalement, les trois médiatrices sont concourantes en O. De plus, O étant à égale distance de A, B et C, le cercle de centre O et de rayon OA passe par B et C.
Réciproquement, un cercle passant par A, B et C a pour centre un point à égale distance de ces points et donc nécessairement de centre O et de rayon OA. Ceci démontre l'existence et l'unicité du cercle circonscrit au triangle (ABC) : c'est le cercle de centre O et de rayon OA.

3) Les hauteurs issues de A et B ne sont pas parallèles (car perpendiculaires à deux droites non parallèles). Elles admettent ainsi un et un seul point d'intersection. Ceci assure l'unicité d'un point commun aux trois hauteurs.
Soit h l'homthétie de centre G et de rapport -2. Puisque $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$, on a $h(A') = A$ et de même $h(B') = B$ et $h(C') = C$.
Par h, l'image de la médiatrice de $[BC]$, c'est-à-dire de la droite passant par A' et perpendiculaire à (BC) est la droite passant par $h(A') = A$ et perpendiculaire à (BC) (car parallèle à la médiatrice de $[B, C]$). Cette droite est la hauteur issue de A du triangle (ABC). De même, les images des médiatrices de $[CA]$ et $[AB]$ sont respectivement les hauteurs issues de B et C.

Le point O est sur les trois médiatrices. Son image par h est donc sur les trois hauteurs (d'où l'existence d'un point commun aux trois hauteurs). Ces trois hauteurs sont ainsi concourantes en un point noté H et appelé l'orthocentre du triangle (ABC). De plus, l'égalité $h(O) = H$ s'écrit $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ ou encore $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$ ou enfin,

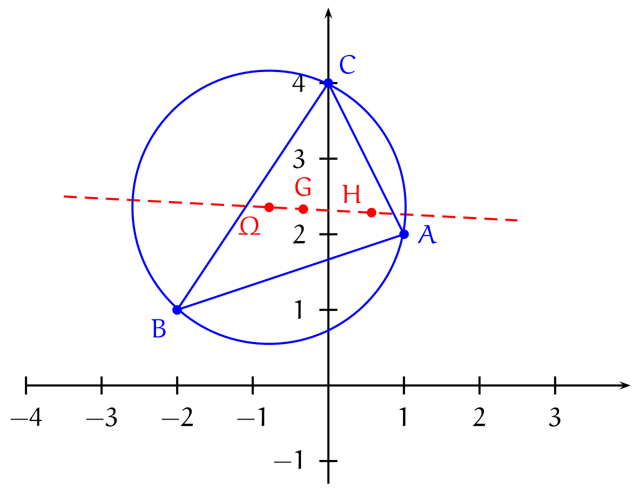
$$\boxed{\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} \text{ (relation d'Euler).}}$$

Les trois points O, G et H, s'ils sont deux à deux distincts, sont en particulier alignés sur une droite appelée **droite d'Euler** du triangle (ABC).



4) Deux bissectrices intérieures ne sont pas parallèles (démontrez-le par des considérations d'angles) et sont donc sécantes en un point I à égale distance des trois côtés du triangle (ABC) et à l'intérieur du triangle (ABC). Ce point est alors centre du cercle tangent intérieurement aux trois côtés, le cercle inscrit.

n° 2 : (Notez bien l'alignement des points G, H et Ω (ici, on note O l'origine du repère et Ω le centre du cercle circonscrit)).



1) On a $AB = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. Par suite,

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{(-3)\times(-1)+(-1)\times 2}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

Par suite,

$$\boxed{\widehat{BAC} = 81° \text{ à un degré près.}}$$

2) $\text{aire}(ABC) = \dfrac{1}{2}|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = \dfrac{1}{2}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right) = \dfrac{7}{2}.$

3) • Notons G l'isobarycentre du triangle (ABC).

$$z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) = \frac{1}{3}(1+2i-2+i+4i) = \frac{1}{3}(-1+7i),$$

et donc

$$\boxed{G\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right).}$$

• Notons (x, y) les coordonnées de Ω, le centre du cercle circonscrit au triangle (ABC).

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega A = \Omega B \\ \Omega A = \Omega C \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2+(y-2)^2 = (x+2)^2+(y-1)^2 \\ (x-1)^2+(y-2)^{=}x^2+(y-4)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x+y=0 \\ 2x-4y=-11 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = -\frac{11}{14} \text{ et } y = \frac{33}{14} \text{ (d'après les formules de } \text{Cramer}),$$

et donc

$$\boxed{\Omega\left(-\frac{11}{14}, \frac{33}{14}\right).}$$

• Notons (x, y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle (ABC).

1ère solution.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2(x-1)+3(y-2)=0 \\ -(x+2)+2(y-1)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y=8 \\ -x+2y=4 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow x = \frac{4}{7} \text{ et } y = \frac{16}{7} \text{ (d'après les formules de } \text{Cramer}),$$

2ème solution. Puisqu'on connaît déjà les points Ω et G, il est bien meilleur d'utiliser la relation d'Euler $\overrightarrow{\Omega H} = 3\overrightarrow{\Omega G}$.

$$H = \Omega + 3\overrightarrow{\Omega G} = \begin{pmatrix} -\dfrac{11}{14} \\ \dfrac{33}{14} \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{3} + \dfrac{11}{14} \\ \dfrac{7}{3} - \dfrac{33}{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{7} \\ \dfrac{16}{7} \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{H\left(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}\right).}$$

• Le rayon du cercle circonscrit au triangle (ABC)

$$\Omega A = \sqrt{\left(1 + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(2 - \frac{33}{14}\right)^2} = \frac{1}{14}\sqrt{25^2 + 5^2} = \frac{5}{14}\sqrt{5^2 + 1} = \frac{5\sqrt{26}}{14}.$$

Il n'y a plus qu'à écrire l'équation cherchée :

$$\left(x + \frac{11}{14}\right)^2 + \left(y - \frac{33}{14}\right)^2 = \frac{325}{98} \text{ ou encore } x^2 + y^2 + \frac{11}{7}x - \frac{33}{7}y + \frac{20}{7} = 0.$$

On peut aussi trouver directement une équation de ce cercle. Les points A, B et C n'étant pas alignés, on sait que le cercle circonscrit existe et est unique.

Soient alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

$$(A, B, C) \in \mathscr{C}^3 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b + c + 5 = 0 \\ -2a + b + c + 5 = 0 \\ 4b + c + 16 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = -4b - 16 \\ a + 2b + (-4b - 16) + 5 = 0 \\ -2a + b + (-4b - 16) + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{11}{7} \\ b = -\dfrac{33}{7} \\ c = \dfrac{20}{7} \end{array}\right. \text{(Cramer)}$$

4) Les bissectrices de l'angle A sont les deux droites constituées des points à égale distance des droites (AB) et (AC). Ces deux droites admettent pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}_1(1, -3)$ et $\overrightarrow{n}_2(2, 1)$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} d(M, (AB)) = d(M, (AC)) &\Leftrightarrow \frac{(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}_1)^2}{\|\overrightarrow{n_1}\|^2} = \frac{(\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}_2)^2}{\|\overrightarrow{n_2}\|^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{((x-1) - 3(y-2))^2}{10} = \frac{(2(x-1) + (y-2))^2}{5} \Leftrightarrow (x - 3y + 5)^2 = 2(2x + y - 4)^2 \\ &\Leftrightarrow \left[(x - 3y + 5) + \sqrt{2}(2x + y - 4)\right] \times \left[(x - 3y + 5) - \sqrt{2}(2x + y - 4)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 + 2\sqrt{2})x + (-3 + \sqrt{2})y + 5 - 4\sqrt{2} = 0 \text{ ou } (1 - 2\sqrt{2})x - (3 + \sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

La bissectrice intérieure δ_A de l'angle $\widehat{A}$ est la droite (pour certains, cette bissectrice est une demi-droite) passant par $A(2, 1)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = -\sqrt{10}(\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC})$. Ce vecteur a pour coordonnées $(3 + \sqrt{2}, 1 - 2\sqrt{2})$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned} M \in \delta_A &\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \Leftrightarrow (1 - 2\sqrt{2})(x - 1) - (3 + \sqrt{2})(y - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sqrt{2})x - (3 + \sqrt{2})y + 5 + 4\sqrt{2} = 0. \end{aligned}$$

n° 3 : (D) est une droite de vecteur normal $(1, 3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda\overrightarrow{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda\overrightarrow{n}$ a pour coordonnées $(x_0 + \lambda, y_0 + 3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda\overrightarrow{n} \in (D) \Leftrightarrow (x_0 + \lambda) + 3(y_0 + 3\lambda) - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}.$$

$p(M_0)$ a donc pour coordonnées $\left(x_0 + \dfrac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}, y_0 + 3\dfrac{-x_0 - 3y_0 + 5}{10}\right)$ ou encore $\left(\dfrac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10}, \dfrac{-3x_0 + y_0 + 15}{10}\right)$.

Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2\overrightarrow{M_0p(M_0)}$.
Ses coordonnées sont donc $\left(x_0 + 2\left(\dfrac{9x_0 - 3y_0 + 5}{10} - x_0\right), y_0 + 2\left(\dfrac{-3x_0 + y_0 + 15}{10} - y_0\right)\right)$ ou encore $\left(\dfrac{4x_0 - 3y_0 + 5}{5}, \dfrac{-3x_0 - 4y_0 + 15}{5}\right)$.

(**Remarque.** Si on n'avait pas déjà $p(M_0)$, on aurait cherché le symétrique sous la forme $M_0 + \lambda\overrightarrow{n}$, λ étant entièrement déterminé par la condition : le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$ appartient à (D).)

n° 4 : Puisque $(ABDC)$ un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont donc $(1, 1)$.

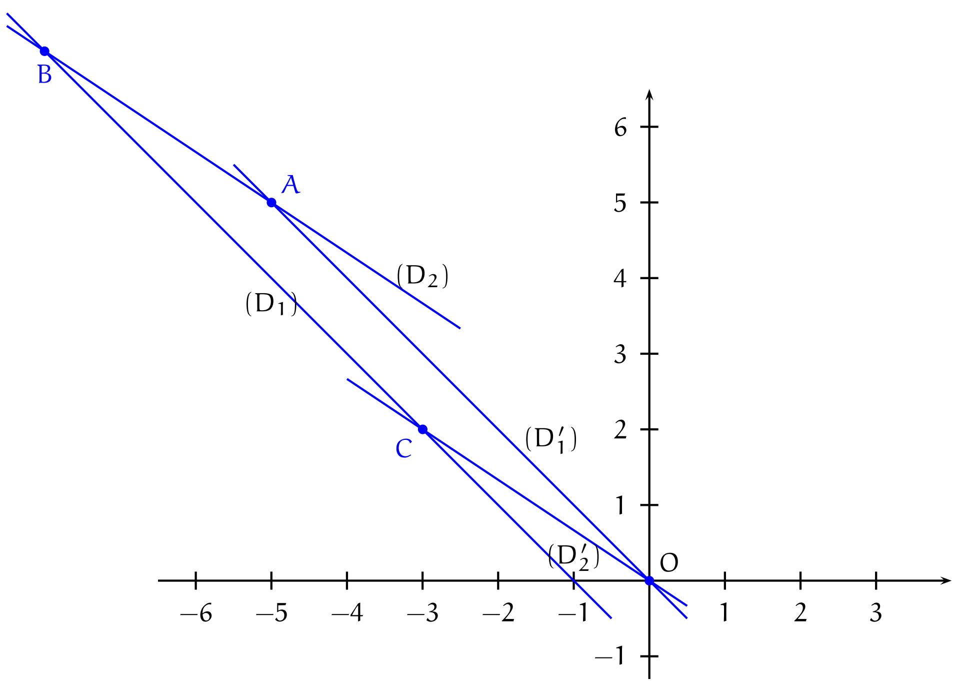
n° 5 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 2x^2 + x(5y-3) + 3y^2 - 2y - 5 &= 2\left(x + \frac{1}{4}(5y-3)\right)^2 - \frac{1}{8}(5y-3)^2 + 3y^2 - 2y - 5\\ &= \frac{1}{8}(4x+5y-3)^2 - \frac{1}{8}y^2 + \frac{14}{8}y - \frac{49}{8}\\ &= \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2 - (y^2 - 14y + 49)] = \frac{1}{8}[(4x+5y-3)^2 - (y-7)^2]\\ &= \frac{1}{8}(4x+4y+4)(4x+6y-10) = (x+y+1)(2x+3y-5)\end{aligned}$$

Par suite,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + 5xy + 3y^2 - 3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow x + y + 1 = 0 \text{ ou } 2x + 3y - 5 = 0.$$

(E) est la réunion de la droite (D_1) d'équation $x + y + 1 = 0$ et de la droite (D_2) d'équation $2x + 3y - 5 = 0$.



La parallèle à (D_1) passant par O est la droite (D'_1) d'équation $x + y = 0$ et la parallèle à (D_2) passant par O est la droite (D'_2) d'équation $2x + 3y = 0$. Ces droites se coupent en les quatre points $O(0, 0)$, $A(-5, 5)$, $B(-8, 7)$ et $C(-3, 2)$. L'aire de ce parallélogramme vaut $\left|\det(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})\right|$ ou encore 5.

n° 6 : Notons (D_1), (D_2) et (D_3) les droites d'équations respectives $y = 2x + 1$, $y = 2x + 7$ et $y = -\dfrac{1}{2}x$ et $\mathscr{C}$ un cercle.

Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles. Donc, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre est sur l'ensemble des points à égale distance de (D_1) et (D_2) à savoir la droite d'équation $y = 2x + 4$ et son rayon est la moitié de la distance de (D_1) à (D_2), ou encore la moitié de la distance d'un point de (D_1), par exemple $(0, 1)$, à (D_2). Cette distance vaut $\dfrac{|2 \times 0 - 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $\mathscr{C}$ est un cercle tangent à (D_1) et (D_2) si et seulement si son centre Ω a des coordonnées de la forme $(a, 2a + 4)$, $a \in \mathbb{R}$, et son rayon vaut $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

Un cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ est tangent à (D_3) si et seulement si la distance de Ω à (D_3) est le rayon $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. Donc,

$$\mathscr{C} \text{ solution} \Leftrightarrow d(\Omega, (D_3)) = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{|a + 2(2a + 4)|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow |5a + 8| = 3$$
$$\Leftrightarrow 5a + 8 = 3 \text{ ou } 5a + 8 = -3 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } a = -\frac{11}{5}$$

On trouve deux cercles solutions, le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $\Omega_1(-1, 2)$ et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ et le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $\Omega_2\left(-\dfrac{11}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$ et de rayon $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

n° 7 : 1) Soient k et k' deux réels non nuls, Ω et Ω' deux points (pas nécessairement distincts), puis h (resp.h') l'homothétie de centre Ω (resp. Ω') et de rapport k (resp. k').

• $h' \circ h$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{\text{hom}_{k'}} \circ \overrightarrow{\text{hom}_k} = \overrightarrow{\text{hom}_{kk'}}$.
Si $kk' \neq 1$, la partie linéaire de $h' \circ h$ est l'homothétie vectorielle de rapport kk' et donc $h' \circ h$ est une homothétie affine de rapport kk'.
Si $kk' = 1$, la partie linéaire de $h' \circ h$ est l'identité et donc $h' \circ h$ est une translation affine.
• Retrouvons directement ces résultats. Soient M un point du plan, puis $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M')$.

$$M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'M'} = \Omega' + k'(\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'}) = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} \ (*)$$

Cherchons alors les points invariants par $h' \circ h$.

$$h' \circ h(M) = M \Leftrightarrow \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = M \Leftrightarrow -\overrightarrow{\Omega' M} + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow (kk' - 1)\overrightarrow{\Omega M} = (k' - 1)\overrightarrow{\Omega\Omega'} \ (**)$$

1er cas. Si $kk' \neq 1$, $(**) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = \dfrac{k' - 1}{kk' - 1}\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, ce qui signifie que l'équation $(**)$ a une et une seule solution que l'on note Ω'', ou encore $h' \circ h$ a un et un seul point invariant, le point Ω'' tel que $\Omega'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''}$.
Mais alors, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M

$$M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega M} = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + kk'\overrightarrow{\Omega\Omega''} + kk'\overrightarrow{\Omega'' M} = \Omega'' + kk'\overrightarrow{\Omega'' M}.$$

$h' \circ h$ est donc l'homothétie de rapport kk' et de centre Ω''. On doit noter que le centre Ω'' est sur la droite $(\Omega\Omega')$.

$$\boxed{\text{Si } kk' \neq 1,\ h' \circ h \text{ est une homothétie de rapport } kk'.}$$

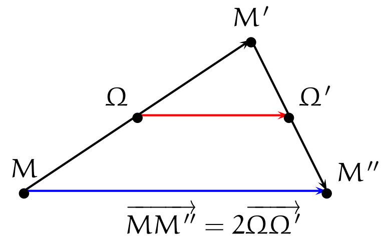
2ème cas. Si $kk' = 1$, l'égalité $(*)$ s'écrit pour tout point M, $M'' = \Omega' + k'\overrightarrow{\Omega'\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ et donc

$$\overrightarrow{MM''} = \Omega' + k'(\Omega - \Omega') + (M - \Omega) - M = (1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}.$$

Dans ce cas, $h' \circ h$ est la translation de vecteur $(1 - k')\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

$$\boxed{\text{Si } kk' = 1,\ h' \circ h \text{ est une translation.}}$$

2) C'est un cas particulier de la question précédente. Une symétrie centrale est une homothétie de rapport -1. Puisque $(-1)(-1)=1$, $s'\circ s$ est une translation. Son vecteur est $\overrightarrow{\Omega s'\circ s(\Omega)}=\overrightarrow{\Omega s'(\Omega)}=2\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.



La composée de deux symétries centrales est une translation : $s_{\Omega'}\circ s_{\Omega}=t_{2\overrightarrow{\Omega\Omega'}}$.

3) La partie linéaire de $s\circ t$ est $\overrightarrow{\mathrm{hom}_{-1}}\circ \mathrm{Id}=\overrightarrow{\mathrm{hom}_{-1}}$. $s\circ t$ est donc une homothétie affine de rapport -1 ou encore une symétrie centrale.

On peut retrouver ce résultat à partir de 2). Soit Ω' le point tel que $\overrightarrow{u}=2\overrightarrow{\Omega'\Omega}$, c'est-à-dire $\Omega'=\Omega-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$. Soit s' la symétrie centrale de centre Ω'. D'après 2), $s\circ s'$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{\Omega'\Omega}=\overrightarrow{u}$. Par suite, $s\circ t=s\circ s\circ s'=s'$.

La composée d'une symétrie centrale et d'une translation est une symétrie centrale.

n° 8 : Pour $1\leq i\leq n$, notons s_i la symétrie centrale de centre A_i. Le problème revient à trouver n points B_1,..., B_n tels que $B_2=s_1(B_1)$, $B_3=s_2(B_2)$,...,$B_n=s_{n-1}(B_{n-1})$, $B_1=s_n(B_n)$. Ceci équivaut à

$$\forall i\in[\![2,n]\!],\ B_i=s_{i-1}\circ s_{i-2}\circ\ldots\circ s_1(B_1)\text{ et }B_1=s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1(B_1)\ (*).$$

Posons alors $f=s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1$. f est une composée de symétries centrales. Il y a donc deux cas. Si n est pair, on peut regrouper les symétries deux par deux. f est alors (d'après le n° 7) une composée de translations et donc f est une translation. Si n est impair, $n-1$ est pair et donc la composée des $n-1$ premières symétries est une translation. Par suite, f est la composée d'une translation et d'une symétrie centrale et est donc une symétrie centrale (d'après le n° 7).

Maintenant, $(*)$ a une solution si et seulement si f a un point invariant. Donc,

1er cas. Si n est impair, f étant une symétrie centrale, f a un et un seul point invariant : son centre. Il existe donc un et un seul point B_1 vérfiant $B_1=s_n\circ s_{n-1}\circ\ldots\circ s_1(B_1)$ et finalement, un et un seul n-uplet $(B_1,\ldots,B_n)$ solution du problème posé.

2ème cas. Si n est pair, f est une translation. Si son vecteur est non nul, f n'a pas de point invariant et le problème n'a pas de solution. Si son vecteur est nul, f est l'identité et tout point est invariant par f. Dans ce dernier cas, B_1 peut être choisi arbitrairement et les points $B_2,\ldots,B_n$ s'en déduisent.

Déterminons donc le vecteur de f. On pose $n=2p$ et on a

$$f=s_{2p}\circ s_{2p-1}\circ\ldots s_2\circ s_1=t_{2\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}}\circ\ldots\circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}=t_{2(\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}})}.$$

Quand n est pair ($n=2p$), le problème posé a des solutions si et seulement si $\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}=\overrightarrow{0}$ et dans ce cas, le problème posé a une infinité de n-uplets solutions du problème posé.

Remarque. L'égalité $\overrightarrow{A_1A_2}+\ldots+\overrightarrow{A_{2p-1}A_{2p}}=\overrightarrow{0}$ équivaut au fait que les systèmes de points $(A_1,A_3,\ldots,A_{2p-1})$ et $(A_2,A_4,\ldots,A_{2p})$ ont même isobarycentre.

n° 9 : Tout d'abord, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2-2x+4y+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+2)^2=4$ et $\mathscr{C}$ est le cerlce de centre $\Omega(1,-2)$ et de rayon 2.

1) Le point $A(2,-2+\sqrt{3})$ est effectivement sur $\mathscr{C}$ car $(2-1)^2+(-2+\sqrt{3}+2)^2=1+3=4$. La tangente (T) en A à $\mathscr{C}$ est la droite passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{A\Omega}$.

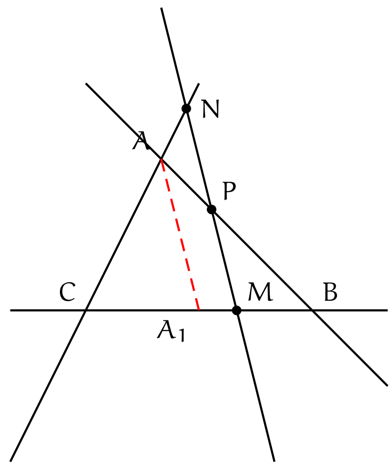
$$M(x,y)\in(T)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega}=0\Leftrightarrow(x-2)+\sqrt{3}(y+2-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow x+\sqrt{3}y-5+2\sqrt{3}=0.$$

2) Soit $\mathscr{C}'$ le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 2. Une équation de ce cercle est $x^2+y^2-2x-3=0$. Par suite,

$$M(x,y)\in\mathscr{C}\cap\mathscr{C}'\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-2x+4y+1=0\\x^2+y^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4y+4=0\quad((1)-(2))\\x^2+y^2-2x-3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\x^2-2x-2=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=-1\\x=1+\sqrt{3}\text{ ou }x=1-\sqrt{3}\end{array}\right.$$

Il y a donc deux points d'intersection : $(1+\sqrt{3},-1)$ et $(1-\sqrt{3},-1)$.

n° 10 :



Montrons tout d'abord que si M, N et P sont alignés, alors $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\times\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1\ (*)$.
On suppose donc que M, N et P sont alignés et on note (Δ) la droite contenant M, N et P.

1ère solution. Soit A_1 le projeté de A sur la droite (BC) parallèlement à la droite (Δ). D'après le théorème de Thales, on a

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}\text{ et }\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}},$$

et donc,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\times\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MC}}{\overline{MA_1}}\times\frac{\overline{MA_1}}{\overline{MB}}=1.$$

2ème solution. Soit h_1 l'homothétie de centre M et de rapport $k_1=\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$. On a donc $h_1(C)=B$. Soit h_2 l'homothétie de centre N et de rapport $k_2=\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}$. On a donc $h_2(A)=C$.

Montrons maintenant que le produit k_1k_2 ne peut être égal à 1. Si c'était le cas, on aurait $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=1$ et donc, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NC}}$. La réciproque du théorème de Thales permettrait alors d'affirmer que (MN) et (AB) sont parallèles, ce qui n'est pas. Donc, $k_1k_2\neq1$ et d'après le n° 7, $h_1\circ h_2$ est une homothétie. Puisque $h_1\circ h_2$ transforme A en B, son centre est sur la droite (AB). Mais d'autre part, son centre est sur la droite des centres (MN). Finalement, le centre de $h_1\circ h_2$ est le point d'intersection de (MN) et (AB), c'est-à-dire le point P.
Mais alors, le rapport de $h_1\circ h_2$ vaut également $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$. Ainsi, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$ et finalement, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\times\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=1$.

3ème solution. On se place dans le repère $\mathscr{R}=(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, les coordonnées des différents points sont : $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $M(m,1-m)$, $N(0,n)$ et $P(p,0)$ où m, n et p sont des réels distincts de 0 et de 1.
Les coordonnées de $\overrightarrow{MB}$ sont $(1-m,m-1)$ et celles de $\overrightarrow{MC}$ sont $(-m,m)$. Par suite, $m\overrightarrow{MB}=(m-1)\overrightarrow{MC}$ et finalement, $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}}=\dfrac{m-1}{m}$. On trouve de même $\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}}=\dfrac{n-1}{n}$ et $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\dfrac{p}{p-1}$. Finalement,

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\times\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
\text{M, N et P alignés } &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -m & p-m \\ m+n-1 & m-1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -m(m-1)-(p-m)(m+n-1)=0 \\
&\Leftrightarrow -pm-pn+p+mn=0 \Leftrightarrow mn=p(m+n-1) \\
&\Leftrightarrow mn=-p(m-1)(n-1)+pmn \Leftrightarrow p(m-1)(n-1)=mn(p-1) \\
&\Leftrightarrow \frac{(m-1)(n-1)p}{mn(p-1)}=1
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, alors les points M, N et P sont alignés. Pour cela, vérifions tout d'abord que (MN) n'est pas parallèle à (AB). Dans le cas contraire, le théorème de THALES fournirait $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ et donc $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$, puis $\overline{PA} = \overline{PB}$ et finalement $\overline{AB} = 0$, ce qui n'est pas.

Par suite, la droite (MN) coupe la droite (AB) en un point P_1 vérifiant d'après le début de l'exercice

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \times \frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = 1.$$

On en déduit que $\frac{\overline{P_1A}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$. Notons k la valeur commune de ce rapport.
On a déjà que $k \neq 1$, ou encore $1-k \neq 0$. Par suite, $P_1 = \text{bar}\{A(1), B(-k)\} = P$ et on a montré que les points M, N et P sont alignés.

n° 11 : Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble cherché et pour θ réel donné, notons $M(\theta)$ le point de coordonnées polaires $[r(\theta), \theta]$.

Tout d'abord, pour tout réel θ, $1+\sin(2\theta) \geq 0$, $1-\sin(2\theta) \geq 0$ puis $\sqrt{1+\sin(2\theta)} + \sqrt{1-\sin(2\theta)} > 0$, car $\sin(2\theta)$ ne peut valoir simultanément 1 et -1. La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, clairement 2π-périodique.

Mais alors pour tout réel θ

$$M(\theta+2\pi) = [r(\theta+2\pi), \theta+2\pi] = [r(\theta), \theta+2\pi] = M(\theta).$$

On obtient donc l'ensemble complet quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$ par exemple.

La fonction $r \mapsto r(\theta)$ est plus paire. Par suite,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta \in [0, \pi]$, on a clairement $r(\pi-\theta) = r(\theta)$. Par suite,

$$M(\pi-\theta) = [r(\pi-\theta), \pi-\theta] = [r(\theta), \pi-\theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Oy) puis par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a clairement $r\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = r(\theta)$. Par suite, en notant (Δ) la droite d'équation $y = x$,

$$M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \left[r\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \frac{\pi}{2}-\theta\right] = \left[r(\theta), \frac{\pi}{2}-\theta\right] = s_{(\Delta)}(M(\theta)).$$

On construit l'ensemble des points correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ et on obtient l'ensemble complet par symétrie orthogonale d'axe (Δ) puis par symétrie orthogonale d'axe (Oy) et enfin par symétrie orthogonale d'axe (Ox).

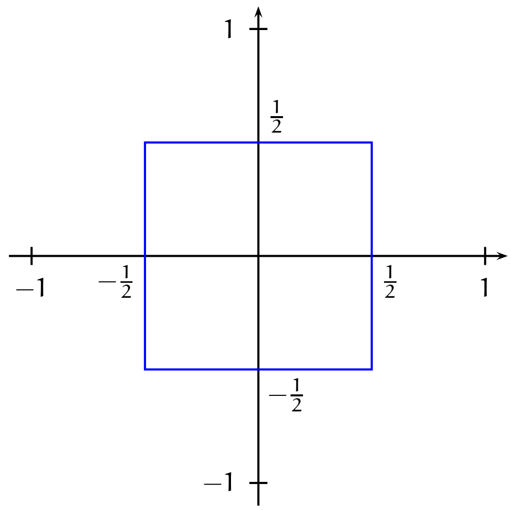
Maintenant, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\sin(2\theta)}+\sqrt{1-\sin(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}+\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+\sqrt{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}$$
$$= \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-(\frac{\pi}{4}-\theta)\right)} = \frac{1}{2\cos\theta}.$$

En notant x et y les coordonnées d'un point M, on a alors

$$M \in \mathscr{E} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2\cos\theta} \Leftrightarrow r\cos(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

D'où le graphique :



n° 12 : Il revient au même de démontrer que, si le plan est rapporté à un repère orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets ont pour coordonnées des nombres entiers.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soient A, B et C trois points deux à deux distincts, non alignés et à coordonnées entières. On sait que $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|}$.

Par suite, ou bien le triangle (ABC) est rectangle en A (et n'est donc pas équilatéral), ou bien

$$\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}.$$

Dans ce dernier cas, $\tan(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un quotient de deux nombres entiers, et est donc un rationnel. Malheureusement, pour un triangle équilatéral, la tangente de chacun de ses angles vaut $\sqrt{3}$ qui n'est pas un rationnel.

Quand le repère est orthonormé, il n'existe pas de triangle équilatéral dont les sommets sont à coordonnées entières.

n° 13 : Soit f la transformation considérée.

1) f est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(3, -1)$.

2) $\omega = 2\omega + 3 \Leftrightarrow \omega = -3$. f est l'homothétie de rapport 2 et de centre $\Omega(-3, 0)$.

3) $\omega = i\omega + 1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{1}{2}(1+i)$. Comme $i = e^{i\pi/2}$, f est la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de centre $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

4) $\omega = (1-i)\omega + 2 + i \Leftrightarrow \omega = 1 - 2i$. Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, f est la similitude de centre $\Omega(1, -2)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

n° 14 :

1) Le fait que (D) et (D') soient sécantes équivaut à $ab' - a'b \neq 0$.
Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de (D) et (D').

• Si (Δ) est une droite ayant une équation de la forme $\lambda(ax+by+c)+\mu(a'x+b'y+c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, alors puisque

$$\lambda(ax_A + by_A + c) + \mu(a'x_A + b'y_A + c') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0,$$

le point A appartient à (Δ).

• Réciproquement, soit (Δ) une droite d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnées (α, β).
Puisque $ab' - a'b \neq 0$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u}(a, b)$ et $\overrightarrow{u'}(a', b')$ ne sont pas colinéaires. Mais alors, la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$ est une base du plan (vectoriel) $\mathbb{R}^2$. Par suite, il existe $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ (car $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$) tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u'}$, ou encore tel que

$$\alpha = \lambda a + \mu a' \text{ et } \beta = \lambda b + \mu b'.$$

Toute droite (Δ) admet donc une équation cartésienne de la forme $\lambda(ax + by) + \mu(a'x + b'y) + \gamma = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

Maintenant, si $A \in (\Delta)$, alors

$$\gamma = -\lambda(ax_A + by_A) - \mu(a'x_A + b'y_A) = -\lambda(-c) - \mu(-c') = \lambda c + \mu c'.$$

Finalement, si $A \in (\Delta)$, (Δ) admet une équation de la forme $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$.

2) Les deux droites (D) et (D') considérées sont bien sécantes car $5 \times 2 - 7 \times (-3) = 31 \neq 0$. Notons A leur point d'intersection et B le point de coordonnées $(1,0)$. B n'est sur aucune des deux droites considérées de sorte qu'il existe une et seule droite, notée (Δ), solution du problème posé.
Puisque (Δ) passe par A, (Δ) a une équation de la forme $\lambda(5x+7y+1)+\mu(-3x+2y+1) = 0$. Il est clair que l'on ne peut avoir $\lambda = 0$ (car (Δ) n'est pas (D')) et après division par λ, l'équation s'écrit sous la forme $(5x+7y+1)+k(-3x+2y+1) = 0$ où k est un réel.
Maintenant, (Δ) passe par B si et seulement si $6 - 2k = 0$ ou encore $k = 3$.

Une équation cartésienne de (Δ) est donc $(5x + 7y + 1) + 3(-3x + 2y + 1) = 0$ ou encore $-4x + 13y + 4 = 0$.

3) Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}\forall m \in \mathbb{R},\ M \in (D_m) &\Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ (2m-1)x + (m+1)y - 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R},\ m(2x + y - 4) - x + y - 1 = 0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = 2\end{aligned}$$

Toutes les droites (D_m) passent par le point $A(1,2)$.

La droite (D_{-1}) passe par A et est parallèle à (Oy). Ensuite, pour $m \neq -1$, (D_m) est la droite passant par A et de coefficient directeur $f(m) = \dfrac{-2m+1}{m+1} = -2 + \dfrac{3}{m+1}$. Quand m décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f(m)$ prend toutes les valeurs réelles sauf -2.
La droite passant par A de coefficient directeur -2 (et donc d'équation $y = -2x + 4$) n'est pas une droite (D_m). Toute autre droite passant par A est une droite (D_m).

