

Planche n° 11. Rationnels et réels

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (I) Montrer que les nombres suivants sont irrationnels.

- 1) (***) $\sqrt{2}$ et plus généralement $\sqrt[n]{m}$ où n est un entier supérieur ou égal à 2 et m est un entier naturel supérieur ou égal à 2, qui n'est pas une puissance n -ième parfaite.
- 2) (***) $\log 2$.
- 3) (****) π (LAMBERT a montré en 1761 que π est irrationnel, LEGENDRE a démontré en 1794 que π^2 est irrationnel, LINDEMANN a démontré en 1882 que π est transcendant).

Pour cela, supposer par l'absurde que $\pi = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Considérer

alors $I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} \sin x \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ et montrer que I_n vérifie

- a) I_n est un entier relatif;
 - b) $I_n > 0$;
 - c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ (on admettra que $\forall q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$).
- 4) (****) e (HERMITE a démontré en 1873 que e est transcendant. C'est historiquement le premier « vrai » nombre dont on a réussi à démontrer la transcendance).

Pour cela, établir que pour tout entier naturel n , $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$, puis que **pour tout** entier naturel

non nul n , $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Raisonner alors par l'absurde.

- 5) (****) $\cos(\frac{2\pi}{7})$. Pour cela trouver une équation du troisième degré à coefficients entiers dont les solutions sont $\cos(\frac{2\pi}{7})$, $\cos(\frac{4\pi}{7})$ et $\cos(\frac{6\pi}{7})$, puis vérifier que cette équation n'a pas de racine rationnelle (supposer par l'absurde qu'il y a une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et montrer que p divise 1 et q divise 8). (On rappelle le théorème de GAUSS : soient a , b et c trois entiers relatifs tous non nuls. Si a divise bc et a et b sont premiers entre eux, alors a divise c).

- 6) (****) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

n° 2 : (IT)** Soient A et B deux parties de \mathbb{R} , non vides et bornées. Montrer que $\sup A$, $\sup B$, $\sup(A+B)$, $\inf A$, $\inf B$, $\inf(A+B)$ existent et que l'on a $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. ($A+B$ désigne l'ensemble des sommes d'un élément de A et d'un élément de B).

n° 3 : ()** Soit $A = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

n° 4 : (IT)** Soit A une partie non vide et bornée de \mathbb{R} . Montrer que $\sup\{|x-y|, (x,y) \in A^2\} = \sup A - \inf A$.

n° 5 : (*IT)** Soient A et B deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} . Que dire de $\sup(A \cap B)$, $\sup(A \cup B)$, $\sup(A+B)$ et $\sup(AB)$? ($A+B$ (resp. AB) désigne l'ensemble des sommes (resp. des produits) d'un élément de A et d'un élément de B).

n° 6 : (**)** Soit u_n le chiffre des unités de C_n^k , k entier naturel fixé non nul et n entier naturel supérieur ou égal à k . Montrer que le nombre $0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$ est rationnel.

n° 7 : ()** (Inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et de MINKOWSKI) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des nombres réels.

- 1) En considérant la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + x b_k)^2$, montrer que $|\sum_{k=1}^n a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).

2) En déduire l'inégalité de MINKOWSKI :
$$\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

(l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ affirme que le produit scalaire de deux vecteurs est inférieur ou égal au produit de leurs normes et l'inégalité de MINKOWSKI est l'inégalité triangulaire).

n° 8 : (**) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = 1$.

n° 9 : (****I) (Sous groupes de $(\mathbb{R}, +)$)

1) Montrer que les sous groupes du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbb{Z}$, a réel donné, soit denses dans \mathbb{R} .

Indication : pour G sous-groupe donné de $(\mathbb{R}, +)$, non réduit à $\{0\}$, considérer $a = \text{Inf}(G \cap]0; +\infty[)$ puis envisager les deux cas $a = 0$ et $a > 0$.

(Definition : G est dense dans \mathbb{R} si et seulement si : $(\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / |y - x| < \varepsilon)$).

2) Application 1. Montrer que $\{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans \mathbb{R} .

3) Application 2 (groupe des périodes d'une fonction).

a) Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer que l'ensemble des périodes de f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$ (ce sous-groupe est réduit à $\{0\}$ si f n'est pas périodique).

b) Montrer qu'une fonction continue sur \mathbb{R} qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes, est constante sur \mathbb{R} .

n° 10 : (**) Montrer que $\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .