

Planche n° 11. Rationnels et réels. Corrigé

n° 1 :

1) Soient m et n deux entiers naturels supérieurs à 2.

$$\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \sqrt[n]{m} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / a^n = m \times b^n.$$

Tout d'abord, si $b = 1$, $m = a^n$ et m est une puissance n -ième parfaite. Ensuite, $a = 1$ est impossible car $m \times b^n \geq 2$. Supposons alors que a et b soient des entiers supérieurs à 2 (et que $a^n = m \times b^n$). L'exposant de tout facteur premier de a^n ou de b^n est un multiple de n et par unicité de la décomposition en facteurs premiers, il en est de même de tout facteur premier de m . Ceci montre que, si $\sqrt[n]{m}$ est rationnel, m est une puissance n -ième parfaite.

Réciproquement, si m est une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est un entier et en particulier un rationnel. En résumé :

$$\forall (m, n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})^2, \sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow m \text{ est une puissance } n\text{-ième parfaite.}$$

Par suite, si m n'est pas une puissance n -ième parfaite, $\sqrt[n]{m}$ est irrationnel.

2)

$$\begin{aligned} \log 2 \in \mathbb{Q} &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / \log 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^{a/b} = 2 \Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 10^a = 2^b \\ &\Rightarrow \exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / 5^a = 2^{b-a}. \end{aligned}$$

Puisque $5^a > 1$, ceci impose $b - a \in \mathbb{N}^*$. Mais alors, l'égalité ci-dessus est impossible pour $a \neq 0$ et $b \neq 0$ par unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On a montré par l'absurde que

$$\log 2 \text{ est irrationnel.}$$

3) Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Il existe alors deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\pi = \frac{p}{q}$.

Pour n entier naturel non nul donné, posons

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx = \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx.$$

• Tout d'abord, pour $0 \leq x \leq \frac{p}{q}$, on a $0 \leq x(p - qx) = \frac{p}{2q} \left(p - \frac{p}{2q} \times q \right) = \frac{p^2}{4q}$, et donc (puisque $0 \leq \sin x \leq 1$ pour $x \in [0, \pi]$),

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^{p/q} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n dx = \frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n.$$

D'après le résultat admis par l'énoncé, $\frac{\pi}{n!} \left(\frac{p^2}{4q} \right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite (I_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

• Ensuite, puisque pour x élément de $[0, \pi]$, on a $x^n (p - qx)^n \sin x \geq 0$, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!} \int_0^\pi x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} x^n (p - qx)^n \sin x \, dx \geq \frac{1}{n!} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{p}{4q} \left(p - \frac{p}{4q} \times q \right) \right)^n \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}n!} \left(\frac{3p^2}{16q} \right)^n > 0. \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

• Vérifions enfin que, pour tout entier naturel non nul n , I_n est un entier (relatif).

Soit $P_n = \frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n$. P_n est un polynôme de degré $2n$ et 0 et $\frac{p}{q}$ sont racines d'ordre n de P_n et donc, pour $0 \leq k \leq n$, racines d'ordre $n - k$ de $P_n^{(k)}$. En particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $0 \leq k < n$, des entiers relatifs. De même, puisque $\deg P_n = 2n$, pour $k \geq 2n + 1$, $P_n^{(k)} \geq 0$ et en particulier, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont, pour $k \geq 2n + 1$, des entiers relatifs.

Soit k un entier tel que $n \leq k \leq 2n$.

$$\frac{1}{n!} x^n (p - qx)^n = \frac{1}{n!} x^n \sum_{i=0}^n C_n^i p^{n-i} (-1)^i q^i x^i = \sum_{i=0}^n \frac{C_n^i}{n!} p^{n-i} (-1)^i q^i x^{n+i} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{C_n^{k-n}}{n!} p^{2n-k} (-1)^{k-n} q^{k-n} x^k.$$

On sait alors que

$$P_n^{(k)}(0) = k! \times (\text{coefficient de } x^k) = (-1)^{k-n} \frac{k!}{n!} C_n^{k-n} p^{2n-k} q^{k-n}.$$

ce qui montre que $P_n^{(k)}(0)$ est entier relatif (puisque $n \leq k \leq 2n$). Puis, comme $P_n\left(\frac{p}{q} - x\right) = P_n(x)$, on a encore $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q} - x\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(x)$ et en particulier $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

On a montré que pour tout entier naturel k , $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$ sont des entiers relatifs.

Montrons alors que I_n est un entier relatif.

Une première intégration par parties fournit : $I_n = [-P_n(x) \cos x]_0^{p/q} + \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx$.

\cos prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$ de même que P_n . Par suite,

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

Une deuxième intégration par parties fournit : $\int_0^{p/q} P_n'(x) \cos x \, dx = [P_n'(x) \sin x]_0^{p/q} - \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x \, dx$.

\sin prend des valeurs entières en 0 et $\frac{p}{q} = \pi$, de même que P_n' et

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n''(x) \sin x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

En renouvelant les intégrations par parties et puisque \sin et \cos prennent des valeurs entières en 0 et π de même que les dérivées successives de P_n , on en déduit que :

$$I_n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx \in \mathbb{Z}.$$

Mais,

$$\int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x) \sin x \, dx = \int_0^{p/q} \frac{1}{n!} (-q)^n (2n)! \sin x \, dx = 2(-q)^n (2n)(2n-1)\dots(n+1) \in \mathbb{Z}.$$

Donc pour tout naturel n , I_n est un entier relatif, strictement positif d'après plus haut. On en déduit que pour tout naturel n , $I_n \geq 1$. Cette dernière constatation contredit le fait que la suite (I_n) converge vers 0 .

L'hypothèse π est rationnel est donc absurde et par suite,

π est irrationnel.

4) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$.

• Pour $n = 0$, $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt = \int_0^1 e^t \, dt = e - 1$ et donc, $e = 1 + \int_0^1 e^t \, dt = \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t \, dt$.

- Soit $n \geq 0$. Supposons que $e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$.

Une intégrations par parties fournit :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^t \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt,$$

et donc,

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt.$$

Le résultat est ainsi démontré par récurrence.

Soit n un entier naturel non nul. D'après ce qui précède,

$$0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supposons alors par l'absurde que e soit rationnel. Alors, il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2 / e = \frac{a}{b}$.

Soit n un entier naturel non nul quelconque. D'après ce qui précède, on a $0 < \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$, ce qui s'écrit encore après multiplication des trois membres par $bn!$

$$0 < a \times n! - b \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{3b}{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 3b$, on a $0 < a \times (3b)! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!} < \frac{3b}{3b+1} < 1$. Mais ceci est impossible car $a \times n! - b \sum_{k=0}^{3b} \frac{(3b)!}{k!}$ est un entier relatif. Il était donc absurde de supposer que e est rationnel et finalement,

e est irrationnel.

- 5) Une équation du troisième degré dont les solutions sont $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ est

$$(X - \cos \frac{2\pi}{7})(X - \cos \frac{4\pi}{7})(X - \cos \frac{6\pi}{7}) = 0,$$

ou encore

$$X^3 - \left(\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} \right) X^2 + \left(\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} \right) X - \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} = 0.$$

Calculons alors ces trois coefficients.

Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Puisque $\omega^7 = 1$ et que $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6 = -1$, on a d'après les formules d'EULER

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2}(\omega + \omega^6 + \omega^2 + \omega^5 + \omega^3 + \omega^4) = -\frac{1}{2},$$

puis,

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{4}((\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5) + (\omega + \omega^6)(\omega^3 + \omega^4) + (\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4)) \\ &= \frac{1}{4}((\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4) + (\omega^4 + \omega^5 + \omega^2 + \omega^3) + (\omega^5 + \omega^6 + \omega + \omega^2)) \\ &= \frac{2(-1)}{4} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7} &= \frac{1}{8}(\omega + \omega^6)(\omega^2 + \omega^5)(\omega^3 + \omega^4) \\ &= \frac{1}{8}(\omega^3 + \omega^6 + \omega + \omega^4)(\omega^3 + \omega^4) = \frac{1}{8}(\omega^6 + 1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + 1 + \omega) = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Les trois nombres $\cos \frac{2\pi}{7}$, $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ sont donc solution de l'équation $X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8} = 0$ ou encore de l'équation

$$8X^3 + 4X^2 - 4X - 1 = 0.$$

Montrons que cette équation n'admet pas de racine rationnelle. Dans le cas contraire, si, pour p entier relatif non nul et q entier naturel non nul tels que p et q sont premiers entre eux, le nombre $r = \frac{p}{q}$ est racine de cette équation, alors $8p^3 + 4p^2q - 4pq^2 - q^3 = 0$. Ceci peut encore s'écrire $8p^3 = q(-4p^2 + 4pq + q^2)$ ce qui montre que q divise $8p^3$. Comme q est premier avec p et donc avec p^3 , on en déduit d'après le théorème de GAUSS que q divise 8 . De même, l'égalité $q^3 = p(8p^2 + 4pq - 4q^2)$ montre que p divise q^3 et donc que p divise 1 .

Ainsi, $p \in \{-1, 1\}$ et $q \in \{1, 2, 4, 8\}$ ou encore $r \in \left\{1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$. On vérifie alors aisément qu'aucun de ces nombres n'est racine de l'équation considérée et donc cette équation n'a pas de racine rationnelle. En particulier,

$$\cos \frac{2\pi}{7} \text{ est irrationnel.}$$

6) On sait que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels mais ceci n'impose rien à la somme $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$. Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} &\Rightarrow (\alpha - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2 = 8 + 2\sqrt{15} \\ &\Rightarrow (\alpha^2 - 2\sqrt{2}\alpha - 6)^2 = 60 \Rightarrow \alpha^4 + 8\alpha^2 - 24 = 4\sqrt{2}\alpha(\alpha^2 - 6)\end{aligned}$$

Si maintenant, on suppose que α est rationnel, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on a nécessairement $\alpha(\alpha^2 - 6) = 0$ (dans le cas contraire, $\sqrt{2} = \frac{\alpha^4 + 8\alpha^2 - 24}{4\alpha(\alpha^2 - 6)} \in \mathbb{Q}$). Mais α n'est ni 0 , ni $-\sqrt{6}$, ni $\sqrt{6}$ (car $\alpha^2 > 2 + 3 + 5 = 10 > 6$). Donc

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ est irrationnel.}$$

n° 2 : A et B sont deux parties non vides et majorées de \mathbb{R} et admettent donc des bornes supérieures notées respectivement α et β .

Pour tout $(a, b) \in A \times B$, on a $a + b \leq \alpha + \beta$. Ceci montre que $A + B$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} , et donc que $\sup(A + B)$ existe dans \mathbb{R} . (De plus, puisque $\alpha + \beta$ est un majorant de $A + B$, on a déjà $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$).

Soit alors $\varepsilon > 0$.

Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a \leq \alpha$ et $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq \beta$, et donc tels que $\alpha + \beta - \varepsilon < a + b \leq \alpha + \beta$.

En résumé,

$$(1) \forall (a, b) \in A \times B, a + b \leq \alpha + \beta \text{ et } (2) \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B / a + b > \alpha + \beta - \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\sup(A + B) = \alpha + \beta = \sup A + \sup B.$$

Pour les bornes inférieures, on peut refaire le travail précédent en l'adaptant ou appliquer le résultat précédent aux ensembles $-A$ et $-B$ car $\inf A = -\sup(-A)$.

n° 3 :

Posons pour n entier naturel non nul $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ de sorte que $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\} = \left\{0, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{3} - 1, \frac{1}{4} + 1, \frac{1}{5} - 1, \dots\right\}$.

Pour $n \geq 1$, $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 < u_{2n} \leq \frac{3}{2}$.

Pour $n \geq 1$, $u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_{2n-1} \leq 0$.

Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-1 < u_n \leq \frac{3}{2}$. Donc, $\sup A$ et $\inf A$ existent dans \mathbb{R} et de plus $-1 \leq \inf A \leq \sup A \leq \frac{3}{2}$.

Ensuite, $\frac{3}{2} = u_2 \in A$. Donc,

$$\sup A = \max A = \frac{3}{2}.$$

Enfin, pour chaque entier naturel non nul n , on a $-1 \leq \inf A \leq u_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}$. On fait tendre n vers l'infini dans cet encadrement, on obtient

$$\inf A = -1$$

(cette borne inférieure n'est pas un minimum).

n° 4 : Posons $B = \{|y - x|, (x, y) \in A^2\}$.

A est une partie non vide et bornée de \mathbb{R} , et donc $m = \inf A$ et $M = \sup A$ existent dans \mathbb{R} .

Pour $(x, y) \in A^2$, on a $m \leq x \leq M$ et $m \leq y \leq M$, et donc $y - x \leq M - m$ et $x - y \leq M - m$ ou encore $|y - x| \leq M - m$.

Par suite, B est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . B admet donc une borne supérieure.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $x_0 < \inf A + \frac{\varepsilon}{2}$ et $y_0 > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}$.

Ces deux éléments x_0 et y_0 vérifient,

$$|y_0 - x_0| \geq y_0 - x_0 > \left(\sup A - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\inf A + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

En résumé,

$$1) \forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leq \sup A - \inf A \text{ et } 2) \forall \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in A^2 / |y - x| > \sup A - \inf A - \varepsilon.$$

Donc, $\sup B = \sup A - \inf A$.

$$\sup \{|y - x|, (x, y) \in A^2\} = \sup A - \inf A.$$

n° 5 :

1) $A \cap B$ peut être vide et on n'a rien à dire. Supposons donc $A \cap B$ non vide. Pour $x \in A \cap B$, on a $x \leq \sup A$ et $x \leq \sup B$ et donc $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

Dans ce cas, $\sup(A \cap B)$ existe et $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.

On ne peut pas améliorer. Par exemple, soit $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ et $B = ([0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \cup \{0\}$. On a $\sup A = 1$, $\sup B = 1$, $A \cap B = \{0\}$ et donc $\sup(A \cap B) = 0 < 1 = \min\{\sup A, \sup B\}$.

2) Pour $x \in A \cup B$, on a $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Donc $\sup(A \cup B)$ existe dans \mathbb{R} et $\sup(A \cup B) \leq \max\{\sup A, \sup B\}$.

Inversement, supposons par exemple $\sup A \geq \sup B$ de sorte que $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon < a \leq \sup A$. a est dans A et donc dans $A \cup B$.

En résumé, $\forall x \in (A \cup B)$, $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$ et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in (A \cup B) / \max\{\sup A, \sup B\} - \varepsilon < x$ et donc

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}.$$

3) D'après le n° 2, $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

4) Pour $\sup(AB)$, tout est possible. Par exemple, si $A = B =]-\infty, 0]$ alors $\sup A = \sup B = 0$, mais $AB = [0, +\infty[$ et $\sup(AB)$ n'existe pas dans \mathbb{R} .

n° 6 : Soient k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur ou égal à k .

$$\begin{aligned} \binom{n+10 \times k!}{k} &= \frac{(n+10 \times k!)(n+10 \times k! - 1) \dots (n+10 \times k! - k + 1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) + 10 \times k! \times K}{k!} \quad (\text{pour un certain entier } K) \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} + 10K = \binom{n}{k} + 10K. \end{aligned}$$

La différence $\binom{n+10 \times k!}{k} - \binom{n}{k}$ est donc divisible par 10. Par suite, $\binom{n+10 \times k!}{k}$ et $\binom{n}{k}$ ont même chiffre des unités en base 10. Ainsi, $\forall n \geq k$, $u_{n+10 \times k!} = u_n$ et donc la suite u est donc $10k!$ -périodique. On sait alors que

$0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots$ est rationnel.

n° 7 : 1) Si les b_k sont tous nuls, l'inégalité est claire.

Sinon, pour x réel, posons

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k + x b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

f est un trinôme du second degré de signe constant sur \mathbb{R} . Son discriminant réduit est donc négatif ou nul ce qui fournit :

$$0 \geq \Delta' = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right),$$

ou encore $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad (\text{CAUCHY-SCHWARZ}) \\ &= \left(\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 \end{aligned}$$

et donc, $\sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}$, qui est l'inégalité de MINKOWSKI.

n° 8 : Pour $x \geq 1$, $x + 2\sqrt{x-1} = x-1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \geq 0$. De même, $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \geq 0$. Donc, si on pose $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, $f(x)$ existe si et seulement $x \geq 1$ et pour $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|$. Par suite,

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + |\sqrt{x-1} - 1| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \sqrt{x-1} = 1,$$

ce qui est impossible. L'équation proposée n'a pas de solution.

n° 9 : 1) Soit G un sous groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ ($\{0\} = 0.\mathbb{Z}$ est du type voulu).

Il existe dans G un réel non nul x_0 . Puisque G est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G \cap]0, +\infty[$.

D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de \mathbb{R} . A admet donc une borne inférieure que l'on note α .

1er cas. Si $a = 0$, montrons dans ce cas que G est dense dans \mathbb{R} (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q}, +)$).

Soient x un réel et ε un réel strictement positif.

Puisque $\inf A = \inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, il existe dans G un élément g tel que $0 < g < \varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel

que $ng \leq x - \varepsilon < (n+1)g$ à savoir $n = E\left(\frac{x - \varepsilon}{g}\right)$.

Soit $y = (n+1)g$. D'une part, y est dans G (si $n+1 = 0$, $(n+1)g = 0 \in G$, si $n+1 > 0$, $(n+1)g = g + g + \dots + g \in G$ et si $n+1 < 0$, $(n+1)g = -(-(n+1)g) \in G$) et d'autre part

$$x - \varepsilon < (n+1)g = ng + g < x - \varepsilon + \varepsilon = x.$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / x - \varepsilon < y < x$ et donc

si $G \neq \{0\}$ et si $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, G est dense dans \mathbb{R} .

2ème cas. Si $a > 0$, montrons dans ce cas que $G = a\mathbb{Z}$. Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G .

Mais si a n'est pas élément de G , par définition de a , il existe un réel x dans $G \cap]a, 2a[$ puis il existe un réel y dans $G \cap]a, x[$. Le réel $x - y$ est alors dans $G \cap]0, a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G .

Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G , G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na , $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G contient aussi les opposés de ces nombres et également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na , $n \in \mathbb{Z}$. On a ainsi montré que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, soit x un élément de G et $n = E\left(\frac{x}{a}\right) (\in \mathbb{Z})$. Alors, $n \leq \frac{x}{a} < n+1$ puis $0 \leq x - na < a$. Or, x est dans G et na est dans G . Donc, $x - na$ est dans $G \cap]0, a[= \{0\}$, puis $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

si $\inf(G \cap]0, +\infty[) = a > 0$, $G = a\mathbb{Z}$.

2) Soit $G = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On vérifie aisément que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n ,

$$(\sqrt{2} - 1)^n \in G \cap]0, +\infty[.$$

Or, $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$. Ceci montre que $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$ et donc que G est dense dans \mathbb{R} .

3) a) Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $G_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)\}$.

0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G \neq \emptyset$.

De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour x réel donné :

$$f(x + (T - T')) = f((x - T') + T) = f(x - T') = f(x - T' + T') = f(x),$$

et $T - T'$ est encore un élément de G . On a montré que

G_f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

b) Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans \mathbb{R} .

Montrons que si de plus f est continue sur \mathbb{R} , f est constante.

Soit x un réel quelconque. On va montrer que $f(x) = f(0)$.

Remarque préliminaire : soit T une période strictement positive de f . Il existe un entier relatif p tel que $pT \leq x < (p+1)T$ à savoir $p = E\left(\frac{x}{T}\right)$. On a alors $f(x) = f(x - pT)$ avec $0 \leq x - pT < T$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans \mathbb{R} , il existe dans G_f un réel T_n tel que $0 < T_n < \frac{1}{n}$ (ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 0$).

Mais alors, puisque $0 < x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n < T_n$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n = 0$.

Maintenant, la suite $\left(f\left(x - E\left(\frac{x}{T_n}\right)T_n\right)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à $f(x)$ et donc convergente vers $f(x)$. On en déduit que

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(x - \mathbb{E}\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - \mathbb{E}\left(\frac{x}{T_n}\right) T_n\right)\right) \quad (\text{par continuité de } f \text{ en } 0)$$

$$= f(0)$$

ce qu'il fallait démontrer .

n° 10 : Soient x un réel et ε un réel strictement positif. On a $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{x + \varepsilon}$. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe un rationnel r tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{x + \varepsilon}$ et donc tel que $x < r^3 < x + \varepsilon$, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^3$ sur \mathbb{R} . On a montré que

$\{r^3, r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans \mathbb{R} .