

Planche n° 12. Trigonométrie circulaire : corrigé

Exercice n° 1

- 1) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 2) $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- 3) $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
- 4) $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
- 5) $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
- 6) $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
- 7) $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 8) $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 2

- 1) $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
- 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.
- 3) $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$ et $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.
- 4) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$ et $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.
- 5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
- 6) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Exercice n° 3

- 1) $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
- 2) $\sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
- 3) $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
- 4) $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
- 5) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$.
De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
- 6) $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 7) $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 8) $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 9) $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
- 10) $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

11) 1ère solution.

$$\begin{aligned} \sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x + \pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / 2x = \pi - (x + \pi) + 2k\pi) \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{2k\pi}{3}) \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ 0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right\}$.

2ème solution.

$$\begin{aligned} \sin(2x) + \sin x = 0 &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)(2\cos(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned} 12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 &\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De plus, $\mathcal{S}_{[-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$.

Exercice n° 4

1) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right]$.

3) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \cos x > \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow 2\cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow \left(2\cos \frac{x}{2} + 1 \right) \left(\cos \frac{x}{2} - 1 \right) > 0 \Leftrightarrow 2\cos \frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos \frac{x}{2} \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right[\\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi \right[\Leftrightarrow x \in \left] \frac{4\pi}{3}, 2\pi \right[. \end{aligned}$$

4) Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geq \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.

5) Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right]$.

6) Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \sin \left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / 2k\pi \leq \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} / \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leq x \leq 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{aligned}$$

Exercice n° 5

$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ et donc, puisque $\cos \frac{\pi}{8} > 0$,

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

De même, $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ et donc, puisque $\sin \frac{\pi}{8} > 0$,

$$\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice n° 6

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice n° 7

Pour n entier naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)}$.

- $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2 \cos a_1$
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ et montrons que $S_{n+1} = 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_n \cos a_{n+1}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n)} \\ &= 2 \cos a_{n+1} S_n \\ &= 2^{n+1} \cos a_1 \dots \cos a_{n+1} \text{ (par hypothèse de récurrence).} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geq 1, S_n = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$.

Ensuite, pour $n \geq 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \dots \cos a_n$ (on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \dots \pm a_n) = \operatorname{Im}(S_n) = 0$).

Exercice n° 8

1) Si a est dans $]0, 2\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k , $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \pi[$ et donc $\sin \frac{a}{2^k} \neq 0$. De plus, puisque $\sin \left(2 \frac{a}{2^k} \right) = 2 \sin \left(\frac{a}{2^k} \right) \cos \left(\frac{a}{2^k} \right)$, on a :

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{a}{2^k} \right) &= \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left(\frac{a}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{a}{2^k} \right)} = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n \frac{\sin \left(\frac{a}{2^{k-1}} \right)}{2 \sin \left(\frac{a}{2^k} \right)} \\ &= \frac{\sin a}{2^n \sin \left(\frac{a}{2^n} \right)} \text{ (produit télescopique).} \end{aligned}$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \cos \left(\frac{a}{2^k} \right) > 0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{a}{2^k} \right) \right) = \ln \left(\prod_{k=1}^n \cos \left(\frac{a}{2^k} \right) \right) = \ln \left(\frac{\sin a}{2^n \sin \left(\frac{a}{2^n} \right)} \right) = \ln \left(\frac{\sin a}{a} \right) - \ln \left(\frac{\sin \left(\frac{a}{2^n} \right)}{\frac{a}{2^n}} \right).$$

Maintenant, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\cos \left(\frac{a}{2^k} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{\sin a}{a} \right) - \ln \left(\frac{\sin \frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} \right) \right) = \ln \left(\frac{\sin a}{a} \right).$$

Exercice n° 9

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20 &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{1 - 4 \cos^2 x} = 20 \Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + 16 \times 2^{-4 \cos^2 x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} - 10 + \frac{16}{2^{4 \cos^2 x}} = 0 \Leftrightarrow (2^{4 \cos^2 x})^2 - 10 \times 2^{4 \cos^2 x} + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} \text{ est solution de l'équation } X^2 - 10X + 16 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2^{4 \cos^2 x} = 2 \text{ ou } 2^{4 \cos^2 x} = 8 \Leftrightarrow 4 \cos^2 x = 1 \text{ ou } 4 \cos^2 x = 3 \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \right). \end{aligned}$$

Exercice n° 10

1) Tout d'abord, d'après la formule de MOIVRE,

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta \text{ et } \sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta.$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan \theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ et $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 3\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

Soit donc $\theta \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta) = \frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)} = \frac{3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta}{\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta} = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3 \theta$.

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z} \right), \tan(3\theta) = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}.$$

2) Soit $a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1ère méthode. a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow (3x - x^3)(1 - 3a^2) = (1 - 3x^2)(3a - a^3) \text{ (car } \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)} \\ &\Leftrightarrow (3a^2 - 1)x^3 - 3(a^3 - 3a)x^2 - 3(3a^2 - 1)x + a^3 - 3a = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - a)((3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3) = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2 - 1)x^2 + 8ax - a^2 + 3$ vaut :

$$\Delta' = 16a^2 - (3a^2 - 1)(-a^2 + 3) = 3a^4 + 6a^2 + 3 = (\sqrt{3}(a^2 + 1))^2 > 0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\mathcal{S} = \left\{ a, \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}, \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2} \right\}.$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\}$ tel que $a = \tan \alpha$ et de même, si x est un réel distinct de $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\}$ tel que $x = \tan \theta$ (à savoir $\alpha = \text{Arctan } a$ et $\theta = \text{arctan } x$). Comme $\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\begin{aligned} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2} &\Leftrightarrow \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha) \\ &\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan \alpha = a$, puis

$$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)}{1 - \tan \alpha \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{a + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}a} = \frac{(a + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}a)}{1 - 3a^2} = \frac{4a + \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2},$$

$$\text{et } x = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a - \sqrt{3}(a^2 + 1)}{1 - 3a^2}.$$

Exercice n° 11

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x, \tan(2x), \tan(3x) \text{ et } \tan(4x) \text{ existent} \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right), \left(x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\pi\mathbb{Z}\right), \left(x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}. \end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8} \cup \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6} \cup \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \cup \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8} \cup \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2} \cup \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8} \cup \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4} \cup \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8} \cup \frac{7\pi}{8}, \pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$.

Sur $I = \left[0, \frac{\pi}{8} \cup \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \pi\right]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I . Ensuite, dans l'expression de somme f , une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ses nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions.

En $\frac{\pi^-}{2}$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi^-}{2}$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi^+}{2}$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$ et finalement,

L'équation (E) admet exactement dix solutions dans $[0, \pi]$.

Exercice n° 12

1) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$.

2) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\cos^4 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin(4x) + 2 \sin(2x) + 3x \right)$.

3) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^4 = \frac{1}{16}(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16}(2\cos(4x) - 8\cos(2x) + 6) = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^4 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} \sin(4x) - 2 \sin(2x) + 3x \right)$.

4) $\cos^2 x \sin^2 x = \frac{1}{4} \sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x))$ et une primitive de $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{8} \left(x - \frac{1}{4} \sin(4x) \right)$.

5) D'après les formules d'EULER,

$$\begin{aligned}\sin^6 x &= \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 = -\frac{1}{64}(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{64}(2\cos(6x) - 12\cos(4x) + 30\cos(2x) - 20) = \frac{1}{32}(-\cos(6x) + 6\cos(4x) - 15\cos(2x) + 10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de $x \mapsto \sin^6 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{32} \left(-\frac{1}{6} \sin(6x) + \frac{3}{2} \sin(4x) - \frac{15}{2} \sin(2x) + 10x \right)$.

6) $\cos x \sin^6 x = \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos x \sin^6 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{7} \sin^7 x$.

7) $\cos^5 x \sin^2 x = \cos x(1 - \sin^2 x)^2 \sin^2 x = \sin' x \sin^2 x - 2 \sin' x \sin^4 x + \sin' x \sin^6 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$ sur \mathbb{R} est $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x$.

8) $\cos^3 x = \sin' x - \sin' x \sin^2 x$ et une primitive de $x \mapsto \cos^3 x$ est $x \mapsto \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$.

Exercice n° 13

1) Pour x réel, on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^4 \left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^6 \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix})(e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix} - 2e^{8ix} - 3e^{6ix} + 8e^{4ix} + 2e^{2ix} - 12 + 2e^{-2ix} + 8e^{-4ix} - 3e^{-6ix} - 2e^{-8ix} + e^{-10ix}) \\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6) \\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x - 2\cos 8x - 3\cos 6x + 8\cos 4x + 2\cos 2x - 6).\end{aligned}$$

(**Remarque.** La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix} , e^{-4ix} , ... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix} , e^{4ix} , ...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512} \left(\left[\frac{\sin 10x}{10} - \frac{\sin 8x}{4} - \frac{\sin 6x}{2} + 2 \sin 4x + \sin 2x \right]_{\pi/6}^{\pi/3} - 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{512} \left(-\frac{1}{4}\sqrt{3} + 2(-\sqrt{3}) - \pi \right) = \frac{9\sqrt{3} + 4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2) Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \\ &= \cos^4 x \sin x - 3 \cos^6 x \sin x + 3 \cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{3 \cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{3} + \frac{\cos^{11} x}{11} \right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\ &= -\frac{1}{5} \times \frac{1}{32} (1 - 9\sqrt{3}) + \frac{3}{7} \times \frac{1}{128} (1 - 27\sqrt{3}) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{512} (1 - 81\sqrt{3}) + \frac{1}{11} \times \frac{1}{2048} (1 - 243\sqrt{3}) \\ &= \frac{1}{2^{11} \times 3 \times 5 \times 7 \times 11} (-14784(1 - 9\sqrt{3}) + 7920(1 - 27\sqrt{3}) - 1540(1 - 81\sqrt{3}) + 105(1 - 243\sqrt{3})) \\ &= \frac{1}{365\,440} (-8284 + 18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Exercice n° 14

1) $\tan \frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{x}{2} \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

2) Pour tout réel x ,

$$\sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \sin x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 0,$$

ou, bien mieux,

$$\sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i(x - \frac{2\pi}{3})} + e^{ix} + e^{i(x + \frac{2\pi}{3})} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{ix} (j^2 + 1 + j) \right) = 0.$$

3) $\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$, $\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4} - x$, $\frac{\pi}{4} + x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) &= \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} + \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cos(2x)} = \frac{2}{\cos(2x)}.\end{aligned}$$

4) Pour $x \notin \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2}{\tan(2x)}.$$

Exercice n° 15

1) Pour tout réel x , $1 - 2k \cos x + k^2 = (k - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$. De plus,

$$1 - 2k \cos x + k^2 = 0 \Rightarrow k - \cos x = \sin x = 0 \Rightarrow x \in \pi\mathbb{Z} \text{ et } k = \cos x \Rightarrow k \in \{-1, 1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \forall x \in \mathbb{R}, 1 - 2k \cos x + k^2 > 0.$$

f_k est donc définie sur \mathbb{R} , dérivable sur \mathbb{R} en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π -périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0, \pi]$. Pour $x \in [0, \pi]$, on a :

$$\begin{aligned}
f'_k(x) &= \cos x(1 - 2k \cos x + k^2)^{-1/2} - \frac{1}{2} \sin x(2k \sin x)(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2} \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(\cos x(1 - 2k \cos x + k^2) - k \sin^2 x) \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(-k \cos^2 x + (1 + k^2) \cos x - k) \\
&= (1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1)(k - \cos x)
\end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_k(x) = \frac{(k \cos x - 1)(k - \cos x)}{(1 - 2k \cos x + k^2)^{3/2}}.$$

1er cas : $|k| < 1$ et $k \neq 0$ ($f_0(x) = \sin x$). Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k \cos x - 1) < 0$ (car $|k \cos x| < 1$) et $f'_k(x)$ est du signe de $\cos x - k$.

x	0	Arccos k	π
f'(x)	+	0	-
f	0	1	0

car $f_k(\text{Arccos } k) = \frac{\sqrt{1 - k^2}}{\sqrt{1 - 2k^2 + k^2}} = 1$.

2ème cas : $k > 1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) > 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $k \cos x - 1$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
f'(x)	+	0	-
f	0	$\frac{1}{k}$	0

car $f_k\left(\text{Arccos } \frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1 - 2 + k^2}} = \frac{1}{k}$.

3ème cas : $k < -1$. Pour tout réel x , $(1 - 2k \cos x + k^2)^{-3/2}(k - \cos x) < 0$ et $f'_k(x)$ est du signe de $1 - k \cos x$.

x	0	Arccos $\frac{1}{k}$	π
f'(x)	+	0	-
f	0	$-\frac{1}{k}$	0

car $f_k\left(\text{Arccos } \frac{1}{k}\right) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1 - 2 + k^2}} = -\frac{1}{k}$.

2) Pour $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, posons $I_k = \int_0^\pi f_k(x) dx$.

Si $k = 0$, $I_k = \int_0^\pi \sin x dx = 2$. Sinon,

$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{k} \int_0^\pi \frac{2k \sin x}{2\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}} dx = \frac{1}{k} \left[\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{k} (\sqrt{1 + 2k + k^2} - \sqrt{1 - 2k + k^2}) = \frac{1}{k} (|k + 1| - |k - 1|).
\end{aligned}$$

Plus précisément, si $k \in]-1, 1[\setminus \{0\}$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k) - (1-k)) = 2$, ce qui reste vrai pour $k = 0$. Si $k > 1$, $I_k = \frac{1}{k}((1+k) - (k-1)) = \frac{2}{k}$, et enfin, si $k < -1$, $I_k = \frac{-2}{k}$. En résumé,

$$\text{Si } k \in]-1, 1[, I_k = 2 \text{ et si } k \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[, I_k = \frac{2}{|k|}.$$

Exercice n° 16

1) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^n (\cos(kx) + i \sin(kx)) = \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n + 1$ et $S'_n = 0$.

2ème cas. Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{ix} \neq 1$ et

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2} e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2} e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i \sin \frac{(n+1)x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos \left(\frac{nx}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n + 1 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n \sin(kx) = \begin{cases} \frac{\left(\sin \frac{nx}{2} \right) \sin \left(\frac{(n+1)x}{2} \right)}{\sin \left(\frac{x}{2} \right)} & \text{si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \cos(kx) &= \sum_{k=0}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos(kx) = \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\sin \left(\left(k + 1 \right) - \frac{1}{2} \right) x \right) - \sum_{k=0}^n \sin \left(\left(k - \frac{1}{2} \right) x \right) \\ &= \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) - \sin \left(\frac{-x}{2} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \sin \frac{(2n+1)x}{2} + \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2} \end{aligned}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}, \dots$

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n 1 = n + 1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^n (\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = n+1 \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n+1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2} \left(n+1 + \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2} \left(n+1 - \frac{\cos(nx) \sin(n+1)x}{\sin x} \right).$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de NEWTON

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) \right) &= \sum_{k=0}^n C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k} \\ &= (1 + e^{ix})^n = \left(e^{ix/2} + e^{-ix/2} \right)^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right). \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2}.$$

Exercice n° 17

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \\ &\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow \left| e^{ia/2} e^{ib/2} \left(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2} \right) \right| = 1 \\ &\Leftrightarrow \left| \cos \frac{a-b}{2} \right| = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z} \right) \Leftrightarrow a-b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \exists \varepsilon \in \{-1, 1\} / b = a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ ou encore $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z} / c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(a, a + \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \right), a \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \{-1, 1\}, (k, k') \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Exercice n° 18

$$\begin{aligned} \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} &= 2 \left(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} \right) = 2 \left(\cos^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{\pi}{8} \right) \\ &= 2 \left(\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8} \right)^2 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\pi}{8} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice n° 19

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z} / 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}\right) \text{ ou } \left(\exists k \in \mathbb{Z} / x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right). \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}_{[0, 2\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10} \right\}.$$

2) $\cos(3x) = \operatorname{Re}(e^{3ix}) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^3) = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow \cos x (4 \cos^2 x - 3 - 2 \sin x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x (-4 \sin^2 x - 2 \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0). \end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0$ admet entre autres pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin \frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin \frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin \frac{13\pi}{10} = -\sin \frac{3\pi}{10}$),

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Ensuite, $\sin \frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{5}$, et donc

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

Enfin, $\cos \frac{\pi}{10} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ et de même $\sin \frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos \frac{3\pi}{10}$.

Exercice n° 20

1) La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et paire. On l'étudie sur $[0, \pi]$.

La fonction f_1 est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout x de $[0, \pi]$

$$f_1'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -2\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) = -2\sin(x)(1 + 2\cos(x)).$$

La fonction sinus s'annule en 0 et π et est strictement positive sur $]0, \pi[$. Donc la fonction f_1' est du signe de $-1 - 2\cos(x)$ sur $]0, \pi[$. Ensuite, pour $x \in]0, \pi[$,

$$-1 - 2\cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3},$$

et

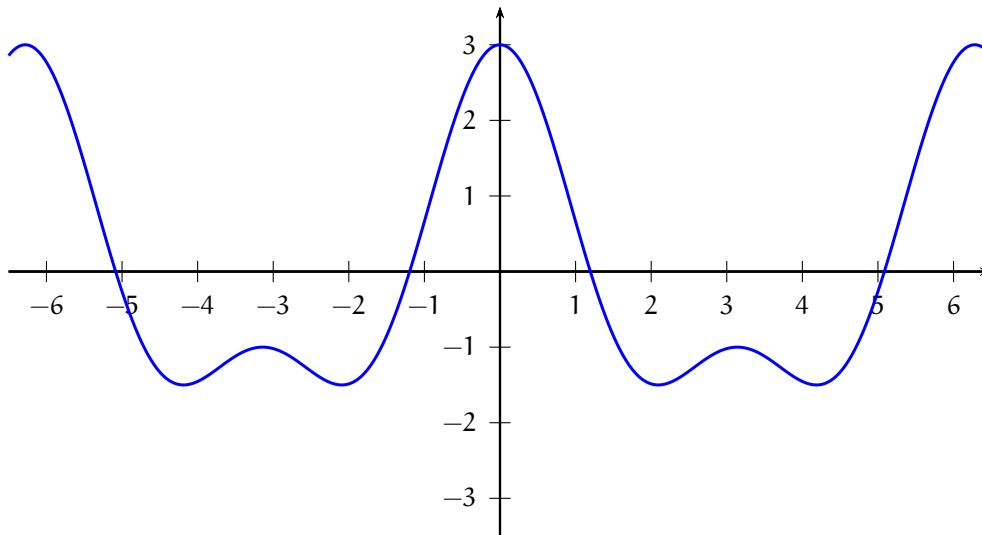
$$-1 - 2\cos(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x) < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \frac{2\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

Ainsi, la fonction f_1' est strictement négative sur $]0, \frac{2\pi}{3}[$, strictement positive sur $]\frac{2\pi}{3}, \pi[$ et s'annule en $0, \frac{2\pi}{3}$ et π .

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_1 :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π		
$f_1'(x)$	0	-	0	+	0
f_1	3		$-\frac{3}{2}$		-1

Graphes de f_1 .



2) Pour tout réel x , $2 - \cos(x) \neq 0$ et donc, la fonction f_2 est définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et impaire. On l'étudie sur $[0, \pi]$.

La fonction f_2 est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout x de $[0, \pi]$

$$f_2'(x) = \frac{\cos(x)(2 - \cos(x)) - \sin(x)(\sin(x))}{(2 - \cos(x))^2} = \frac{2\cos(x) - 1}{(2 - \cos(x))^2}.$$

La fonction f_2' est du signe de $2\cos(x) - 1$ sur $[0, \pi]$. Ensuite, pour $x \in [0, \pi]$,

$$2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3},$$

et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \frac{\pi}{3} \text{ (par stricte décroissance de la fonction } \cos \text{ sur } [0, \pi].)$$

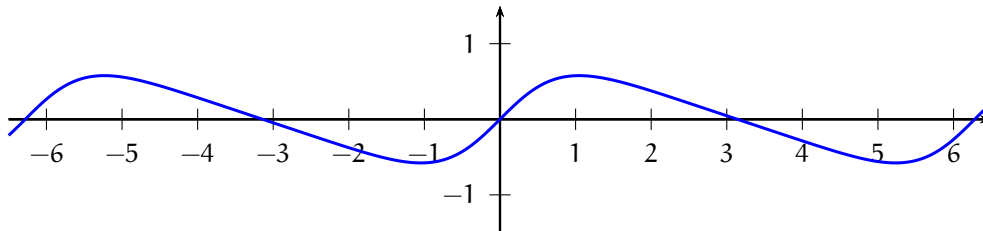
Ainsi, la fonction f_2' est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{3}[$, strictement négative sur $]\frac{\pi}{3}, \pi]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$. On note que

$$f_2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,57\dots$$

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_2 :

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f_1'(x)$	+	0	-
f_1	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Graphe de f_2 .



3) f_3 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π -périodique. f_3 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_3 sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Si $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3(x) = \tan x + \cos x$ et si $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3(x) = -\tan x + \cos x$.

Etude en $\frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} |\tan x| = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \cos x = 0$. Donc, $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = +\infty$. La courbe représentative de la fonction f_3 admet la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

Dérivabilité et dérivée. f_3 est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ et pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_3'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$. f_3 est dérivable à droite en 0 et $(f_3)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_3 est dérivable à gauche en 0 et $(f_3)'_g(0) = -1$. f_3 n'est pas dérivable en 0.

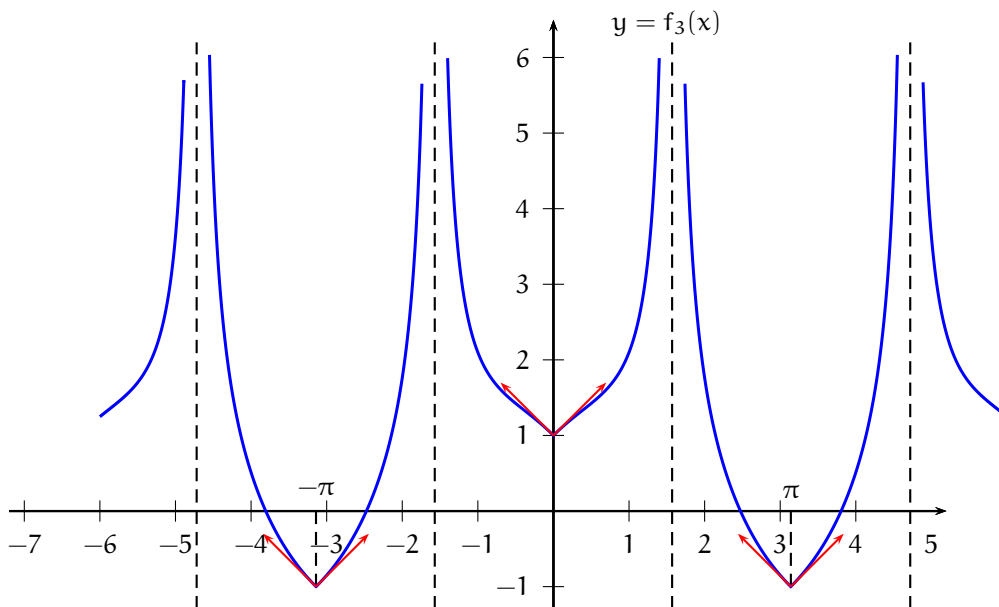
De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_3)'_g(\pi) = -1$ et $(f_3)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π .

Variations. f_3 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Puis, pour x élément de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f_3'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0.$$

La fonction f_3' est strictement positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et donc f_3 est strictement croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Graphe.



4) La fonction f_4 est 2π -périodique. On l'étudie sur $[-\pi, \pi]$. Pour $x \in [-\pi, \pi]$,

$$2 \cos(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3}.$$

Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $f_4(x)$ existe si et seulement si $x \neq -\frac{2\pi}{3}$ et $x \neq \frac{2\pi}{3}$. On étudie la fonction f_4 sur $D = \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$.

Etude en $\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2 \cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures et quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2 \cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures. D'autre part, quand x tend vers $\frac{2\pi}{3}$, $2 \sin(x) + 1$ tend vers $\sqrt{3} + 1$ qui est strictement positif. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Etude en $-\frac{2\pi}{3}$. Quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$ par valeurs inférieures, $2 \cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$ par valeurs supérieures, $2 \cos(x) + 1$ tend vers 0 par valeurs supérieures. D'autre part, quand x tend vers $-\frac{2\pi}{3}$, $2 \sin(x) + 1$ tend vers $-\sqrt{3} + 1$ qui est strictement négatif. On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2\pi}{3}^-} f_4(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{2\pi}{3}^+} f_4(x) = -\infty.$$

Dérivée. La fonction f_4 est dérivable sur D et pour tout x de D ,

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= \frac{(2 \cos(x))(2 \cos(x) + 1) - (2 \sin(x) + 1)(-2 \sin(x))}{(2 \cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2 \cos(x) + 2 \sin(x)}{(2 \cos(x) + 1)^2} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(x) \right)}{(2 \cos(x) + 1)^2} = \frac{4 + 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{(2 \cos(x) + 1)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout x de D , $4 + 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 4 - 2\sqrt{2} > 0$ et donc la fonction f_4' est strictement positive sur D . La fonction f_4 est donc strictement croissante sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$ (mais pas sur $\left[-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$).

Graphe.

