

Planche n° 12. Trigonométrie circulaire

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = 0$ 2) $\sin x = 1$ 3) $\sin x = -1$ 4) $\cos x = 1$ 5) $\cos x = -1$
6) $\cos x = 0$ 7) $\tan x = 0$ 8) $\tan x = 1$.

Exercice n° 2 (*IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \frac{1}{2}$ 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\tan x = -1$ 4) $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 5) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice n° 3 (**IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans I les équations suivantes :

1) $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, I = $[0, 2\pi]$ 2) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, I = $[0, 4\pi]$ 3) $\tan(5x) = 1$, I = $[0, \pi]$
4) $\cos(2x) = \cos^2 x$, I = $[0, 2\pi]$ 5) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$, I = $[0, 2\pi]$ 6) $\cos(nx) = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
7) $|\cos(nx)| = 1$ 8) $\sin(nx) = 0$ 9) $|\sin(nx)| = 1$
10) $\sin x = \tan x$, I = $[0, 2\pi]$ 11) $\sin(2x) + \sin x = 0$, I = $[0, 2\pi]$ 12) $12 \cos^2 x - 8 \sin^2 x = 2$, I = $[-\pi, \pi]$.

Exercice n° 4 (**IT)

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1) $\cos x \leq \frac{1}{2}$, I = $[-\pi, \pi]$ 2) $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$, I = \mathbb{R} 3) $\cos x > \cos \frac{x}{2}$, I = $[0, 2\pi]$
4) $\cos^2 x \geq \cos(2x)$, I = $[-\pi, \pi]$ 5) $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$, I = $[0, 2\pi]$ 6) $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}$, I = $[0, 2\pi]$.

Exercice n° 5 (*I)

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice n° 6 (*I)

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice n° 7 (***)

Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Exercice n° 8 (***)

1) Calculer $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, 2\pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$).

2) Pour $a \in]0, \pi[$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$.

Exercice n° 9 (**)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$.

Exercice n° 10 (***)

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1) Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan \theta$.

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Exercice n° 11 (*)** Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Exercice n° 12 (I)**

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lllll} 1) x \mapsto \cos^2 x & 2) x \mapsto \cos^4 x & 3) x \mapsto \sin^4 x & 4) x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x & 5) x \mapsto \sin^6 x \\ 6) x \mapsto \cos x \sin^6 x & 7) x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x & 8) x \mapsto \cos^3 x. & & \end{array}$$

Exercice n° 13 (I)**

$$\text{Calculer } I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx \text{ et } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx.$$

Exercice n° 14 ()**

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} & 2) \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ 3) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2}{\cos(2x)} & 4) \frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}. \end{array}$$

Exercice n° 15 (*)**

Soit k un réel distinct de -1 et de 1 .

1) Etudier les variations de $f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}}$.

2) Calculer $\int_0^\pi f_k(x) \, dx$.

Exercice n° 16 (I)**

Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

2) $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

3) $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Exercice n° 17 (*)**

Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

Exercice n° 18 ()**

Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

Exercice n° 19 (*)**

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\cos(3x) = \sin(2x)$.

2) En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}$.

Exercice n° 20 (IT)**

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1)} f_1 : x \mapsto 2 \cos(x) + \cos(2x) & \mathbf{2)} f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} \\ \mathbf{3)} f_3 : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x) & \mathbf{2)} f_4 : x \mapsto \frac{2 \sin(x) + 1}{2 \cos(x) + 1} \end{array}$$