

Planche n° 12. Suites

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (IT)** Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_n}{n+1}$.

- 1) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers un réel ℓ , la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite ℓ . Réciproque ?
- 2) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Réciproque ?
- 3) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

n° 2 : (*)** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de CÉSARO (c'est-à-dire si la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie au n° 1 converge) et est monotone, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

n° 3 : (IT)** Pour n entier naturel non nul, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (série harmonique).

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) < H_n < 1 + \ln(n)$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n$.
- 2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers un réel $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (γ est appelée la constante d'EULER). Donner une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.

n° 4 : ()** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique ne s'annulant pas. Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$.

n° 5 : ()** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2}$.

n° 6 : (*)** Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$ et $v_0 = b$ puis, pour n entier naturel donné, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et que leur limite commune est égale à $\frac{b \sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{\operatorname{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$.

n° 7 : ()** Limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$1) \frac{\sin n}{n} \quad 2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad 3) \frac{n!}{n^n} \quad 4) \frac{E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)} \quad 5) \sqrt[n]{n^2} \quad 6) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad 7) \frac{\sum_{k=1}^n k^2}{n^3} \quad 8) \prod_{k=1}^n 2^{k/2^{2^k}}$$

n° 8 : ()** Etudier la suite (u_n) définie par $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

n° 9 : (T)** (Récurrences homogènes).

Déterminer u_n en fonction de n quand la suite u vérifie : 1) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$ 2) $u_{n+1} = \frac{4(u_n-1)}{u_n}$ (ne pas se poser de questions d'existence).

n° 10 : ()** Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par la donnée de u_0 et v_0 et les relations de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \text{ et } \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Etudier les suites u et v puis déterminer u_n et v_n en fonction de n en recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de u et v . En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

n° 11 : ()** Même exercice avec $u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}$ et $w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

n° 12 : (*)** Montrer que les suites définies par la donnée de u_0, v_0 et w_0 réels tels que $0 < u_0 < v_0 < w_0$ et les relations de récurrence :

$$\frac{3}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} + \frac{1}{w_n} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt[3]{u_n v_n w_n} \text{ et } w_{n+1} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3},$$

ont une limite commune que l'on ne cherchera pas à déterminer.

n° 13 : (*)** Soit u une suite complexe et v la suite définie par $v_n = |u_n|$. On suppose que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ converge vers un réel positif ℓ . Montrer que si $0 \leq \ell < 1$, la suite (u_n) converge vers 0 et si $\ell > 1$, la suite (v_n) tend vers $+\infty$. Montrer que si $\ell = 1$, tout est possible.

n° 14 : (*)**

1) Soit u une suite de réels strictement positifs. Montrer que si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel ℓ , alors $(\sqrt[n]{u_n})$ converge et a même limite.

2) Etudier la réciproque.

3) Application : limites de a) $\sqrt[n]{C_{2n}^n}$ b) $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ c) $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{(3n)!}$.

n° 15 : (*) Soient u et v deux suites de réels de $[0, 1]$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

n° 16 : ()** Montrer que si les suites (u_n^2) et (u_n^3) convergent alors (u_n) converge.

n° 17 : (*)** Etudier les deux suites $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

n° 18 : ()** Même exercice avec $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$.

n° 19 : ()** Même exercice avec $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n}$.

n° 20 : ()** Déterminer u_n en fonction de n et de ses premiers termes dans chacun des cas suivants :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n.$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = u_n.$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, 4u_{n+2} = 4u_{n+1} + 3u_n + 12.$

4) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2}{u_{n+2}} = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}.$

5) $\forall n \geq 2, u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + n^3.$

6) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} - 6u_{n+2} + 11u_{n+1} - 6u_n = 0.$

7) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = n^5.$

n° 21 : (*)** On pose $u_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{n}) = \frac{1}{2}$.

n° 22 : (***) Montrer que, pour $n \geq 2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}).$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}} \quad (n \text{ radicaux})$.

n° 23 : (***)

1) Montrer que pour x réel strictement positif, on a : $\ln(1+x) < x < (1+x)\ln(1+x)$.

2) Montrer que $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$ et en déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

n° 24 : (****) Soit $(u_n) = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ avec $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$, une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel x . Montrer que les suites $(|p_n|)$ et (q_n) tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

n° 25 : (**) Donner un exemple de suite (u_n) divergente, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, la suite (u_{kn}) converge.

n° 26 : (***) Soit f une application injective de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

n° 27 : (***) Soit u_n l'unique racine positive de l'équation $x^n + x - 1 = 0$. Etudier la suite (u_n) .

n° 28 : (****) Etude des suites $(u_n) = (\cos n\alpha)$ et $(v_n) = (\sin n\alpha)$ où α est un réel donné.

1) Montrer que si $\frac{\alpha}{2\pi}$ est rationnel, les suites u et v sont périodiques et montrer dans ce cas que (u_n) et (v_n) convergent si et seulement si $\alpha \in 2\pi\mathbb{Z}$.

2) On suppose dans cette question que $\frac{\alpha}{2\pi}$ est irrationnel.

a) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge.

b) En utilisant différentes formules de trigonométrie fournissant des relations entre u_n et v_n , montrer par l'absurde que (u_n) et (v_n) divergent.

3) On suppose toujours que $\frac{\alpha}{2\pi}$ est irrationnel. On veut montrer que l'ensemble des valeurs de la suite (u_n) (ou (v_n)) est dense dans $[-1, 1]$, c'est-à-dire que $\forall x \in [-1, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} / |u_n - x| < \varepsilon$ (et de même pour v).

a) Montrer que le problème se ramène à démontrer que $\{n\alpha + 2k\pi, n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

b) Montrer que $E = \{n\alpha + 2k\pi, n \in \mathbb{N} \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans \mathbb{R} (par l'absurde en supposant que $\inf(E \cap \mathbb{R}_+) > 0$ pour en déduire que $\frac{\alpha}{2\pi} \in \mathbb{Q}$).

c) Conclure.

n° 29 : (****) Montrer que l'ensemble E des réels de la forme $u_n = \sin(\ln(n))$, n entier naturel non nul, est dense dans $[-1, 1]$.

n° 30 : (***) Calculer $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$.

n° 31 : (***) Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

n° 32 : (***) Soit (u_n) une suite de réels éléments de $]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, (1 - u_n)u_{n+1} > \frac{1}{4}$. Montrer que (u_n) converge vers $\frac{1}{2}$.