

Planche n° 12. Suites. Corrigé

n° 1 : 1) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang n_0 tel que, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit n un entier naturel strictement supérieur à n_0 .

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - \ell \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k - \ell| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, $\sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell|$ est une expression constante quand n varie et donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| = 0$. Par suite, il

existe un entier $n_1 \geq n_0$ tel que pour $n \geq n_1$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq n_1$, on a alors $|v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_1 \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$. La suite (v_n) est donc convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Si la suite u converge vers ℓ alors la suite v converge vers ℓ .

La réciproque est fautive. Pour n dans \mathbb{N} , posons $u_n = (-1)^n$. La suite (u_n) est divergente. D'autre part, pour n dans \mathbb{N} , $\sum_{k=0}^n (-1)^k$ vaut 0 ou 1 suivant la parité de n et donc, dans tous les cas, $|v_n| \leq \frac{1}{n+1}$. Par suite, la suite (v_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2) Si u est bornée, il existe un réel M tel que, pour tout naturel n , $|u_n| \leq M$.

Pour n entier naturel donné, on a alors

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n M = \frac{1}{n+1} (n+1)M = M.$$

La suite v est donc bornée.

Si la suite u est bornée alors la suite v est bornée.

La réciproque est fautive. Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n E\left(\frac{n}{2}\right) = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p, p \in \mathbb{N} \\ -p & \text{si } n = 2p+1, p \in \mathbb{N} \end{cases}$.

u n'est pas bornée car la suite extraite (u_{2p}) tend vers $+\infty$ quand p tend vers $+\infty$. Mais, si n est impair, $v_n = 0$, et si n est pair, $v_n = \frac{1}{n+1} \times u_n = \frac{n}{2(n+1)}$, et dans tous les cas $|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \frac{n}{2} \leq \frac{1}{n+1} \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}$ et la suite v est bornée.

3) Si u est croissante, pour n entier naturel donné on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1) \sum_{k=0}^{n+1} u_k - (n+2) \sum_{k=0}^n u_k \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left((n+1)u_{n+1} - \sum_{k=0}^n u_k \right) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sum_{k=0}^n (u_{n+1} - u_k) \geq 0. \end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

Si la suite u est croissante alors la suite v est croissante.

n° 2 : Supposons sans perte de généralité u croissante (quite à remplacer u par $-u$).

Dans ce cas, ou bien u converge, ou bien u tend vers $+\infty$.

Supposons que u tende vers $+\infty$, et montrons qu'il en est de même pour la suite v .

Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe un rang n_0 tel que pour n naturel supérieur ou égal à n_0 , $u_n \geq 2A$. Pour $n \geq n_0 + 1$, on a alors,

$$v_n = \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^n u_k \right) \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$$

Maintenant, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1}$ tend vers $2A$ et donc, il existe un rang n_1 à partir duquel

$$v_n \geq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \frac{(n-n_0)2A}{n+1} > A.$$

On a montré que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_1 \Rightarrow v_n > A))$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Par contraposition, si v ne tend pas vers $+\infty$, la suite u ne tend pas vers $+\infty$ et donc converge, d'après la remarque initiale.

n° 3 : 1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$ et donc, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{k+1} = (k+1-k) \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq (k+1-k) \frac{1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Donc, pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ et, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

En sommant ces inégalités, on obtient pour $n \geq 1$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln(n+1),$$

et pour $n \geq 2$,

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx = 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \ln n,$$

cette dernière inégalité restant vraie quand $n = 1$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$

2) Soit n un entier naturel non nul.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \leq 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $[n, n+1]$. De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x} dx = \int_{n+1}^{n+2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$$

car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroît sur $[n+1, n+2]$. Enfin,

$$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

et donc la suite $u - v$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Finalement, la suite u décroît, la suite v croît et la suite $u - v$ tend vers 0. On en déduit que les suites u et v sont adjacentes, et en particulier convergentes et de même limite. Notons γ cette limite.

Pour tout entier naturel non nul n , on a $v_n \leq \gamma \leq u_n$, et en particulier, $v_3 \leq \gamma \leq u_1$ avec $v_3 = 0,5\dots$ et $u_1 = 1$. Donc, $\gamma \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Plus précisément, pour n entier naturel non nul donné, on a

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{10^{-2}}{2} \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 0,005 \Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq e^{0,005} - 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{e^{0,005} - 1} = 199,5\dots \Leftrightarrow n \geq 200.$$

Donc $0 \leq \gamma - v_{100} \leq \frac{10^{-2}}{2}$ et une valeur approchée de v_{200} à $\frac{10^{-2}}{2}$ près (c'est-à-dire arrondie à la 3^{ème} décimale la plus proche) est une valeur approchée de γ à 10^{-2} près. On trouve $\gamma = 0,57$ à 10^{-2} près par défaut. Plus précisément,

$$\gamma = 0,5772156649\dots \quad (\gamma \text{ est la constante d'EULER}).$$

n° 4 : Soit r la raison de la suite u . Pour tout entier naturel k , on a

$$\frac{r}{u_k u_{k+1}} = \frac{u_{k+1} - u_k}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}.$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$r \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_0}{u_0 u_{n+1}} = \frac{(n+1)r}{u_0 u_{n+1}}.$$

Si $r \neq 0$, on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{(n+1)}{u_0 u_{n+1}}$, et si $r = 0$ (et $u_0 \neq 0$), u est constante et le résultat est immédiat.

n° 5 : Soit k un entier naturel non nul. On sait que $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Déterminons alors trois réels a , b et c tels que, pour entier naturel non nul k ,

$$\frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} \quad (*).$$

Pour k entier naturel non nul donné,

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{2k+1} = \frac{a(k+1)(2k+1) + bk(2k+1) + ck(k+1)}{k(k+1)(2k+1)} = \frac{(2a+2b+c)k^2 + (3a+b+c)k + a}{k(k+1)(2k+1)}.$$

Par suite,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b+c=0 \\ 3a+b+c=0 \\ a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=6 \\ c=-24 \end{cases},$$

et donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{6}{k(k+1)(2k+1)} = 6 \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - 4 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} \right).$$

Ensuite, d'après le n° 3, quand n tend vers $+\infty$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = H_{n+1} - 1 = -1 + \ln(n+1) + \gamma + o(1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \gamma - 1 + o(1) = \ln n + \gamma - 1 + o(1).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} &= -1 + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = -1 + H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n \\ &= \ln(2n+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) - 1 + o(1) = \ln 2 + \ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \gamma - \frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \\ &= \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{1}{2}\gamma - 1 + o(1) \end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6 \left(\ln n + \gamma + \ln n + \gamma - 1 - 4 \left(\frac{1}{2} \ln n + \ln 2 + \frac{1}{2} \gamma - 1 \right) \right) = 6(3 - 4 \ln 2) + o(1).$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + k^2} = 6(3 - 4 \ln 2).$$

n° 6 : Posons $\alpha = \text{Arccos} \frac{a}{b}$. α existe car $0 < \frac{a}{b} < 1$ et est élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$. De plus, $a = b \cos \alpha$. Enfin, pour tout entier naturel n , $\frac{\alpha}{2^n} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc, $\cos \frac{\alpha}{2^n} > 0$.

On a $u_0 = b \cos \alpha$ et $v_0 = b$ puis $u_1 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0) = \frac{b}{2}(1 + \cos \alpha) = b \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ et $v_1 = \sqrt{u_1 v_0} = \sqrt{b \cos^2 \frac{\alpha}{2} \times b} = b \cos \frac{\alpha}{2}$
 puis $u_2 = \frac{b}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \frac{\alpha}{2}) = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2}$ et $v_2 = \sqrt{b \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2^2} \times b \cos \frac{\alpha}{2}} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2^2} \dots$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$.

C'est vrai pour $n = 1$ et si pour $n \geq 1$ donné, on a $v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}$ et $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}$ alors,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} + v_n) = v_n \cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}$$

puis

$$v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} = v_n \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} \quad (\text{car } \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} > 0),$$

et donc, $v_{n+1} = b \prod_{k=1}^{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^k}$ puis $u_{n+1} = v_{n+1} \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} \text{ et } u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

Pour tout entier naturel non nul n , on a $v_n > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \cos \frac{\alpha}{2^{n+1}} < 1$. La suite v est donc strictement décroissante. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n , on a $u_n > 0$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} \frac{\cos \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2^n}} \right) > \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

La suite u est strictement croissante. Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = b \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k} = b \prod_{k=1}^n \frac{\sin \frac{\alpha}{2^{k-1}}}{2 \sin \frac{\alpha}{2^k}}$$

$$= \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $v_n \sim \frac{\sin \alpha}{2^n \frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, puis $u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \sim v_n \sim \frac{\sin \alpha}{\alpha}$.

Ainsi, les suites u et v sont adjacentes de limite commune $b \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{\text{Arccos}\left(\frac{a}{b}\right)}$.

n° 7 : 1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2) Quand n tend vers $+\infty$, $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc, $\ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ tend vers 1 puis, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+1/n)}$ tend vers $e^1 = e$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Pour n entier naturel non nul, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Donc, quand n tend vers $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-n \ln(1+1/n)} = e^{-n(1/n + o(1/n))} = e^{-1+o(1)}$. Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\frac{1}{e} = 0.36... < 1$. On sait alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

4) Pour $n \geq 1$, $\frac{(n + \frac{1}{2})^2 - 1}{(n - \frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \frac{(n + \frac{1}{2})^2}{(n - \frac{1}{2})^2 - 1}$. Or, $\frac{(n + \frac{1}{2})^2 - 1}{(n - \frac{1}{2})^2}$ et $\frac{(n + \frac{1}{2})^2}{(n - \frac{1}{2})^2 - 1}$ tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$ et donc, d'après le théorème de la limite par encadrement, la suite u converge et a pour limite 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1.$$

5) Quand n tend vers $+\infty$, $\sqrt[n]{n^2} = e^{\frac{1}{n} \ln(n^2)} = e^{2 \ln n / n} = e^{o(1)}$, et donc $\sqrt[n]{n^2}$ tend vers 1.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

$$6) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

$$7) \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \sim \frac{2n^3}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

8) $\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} = 2^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}}}$. Pour x réel, posons $f(x) = \sum_{k=1}^n kx^{k-1}$. f est dérivable sur \mathbb{R} en tant que polynôme et pour tout réel x ,

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^n x^k \right)' (x) = \left(\sum_{k=0}^n x^k \right)' (x).$$

Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f(x) = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \right)' (x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

En particulier, $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^{k-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{n}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^n} + 1}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} \rightarrow 4$ (d'après un théorème de croissances comparées). Finalement,

$$\prod_{k=1}^n 2^{k/2^k} \rightarrow 2^{4/2} = 4.$$

n° 8 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &\Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n+u_n} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \\ 4(n+u_n) = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2 &\Leftrightarrow u_n = -n + \frac{1}{4}(2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}) \\ \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{4}(-2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}) \end{aligned}$$

Par suite, quand n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{n}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{n^2+n} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \right) = \frac{1}{4} + \frac{n}{2} \frac{1/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + o(1) = \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

La suite (u_n) converge et a pour limite $\frac{1}{2}$.

n° 9 : 1) Calcul formel de u_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{x}{3-2x} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1}{\frac{u_n}{3-2u_n}} = \frac{3u_n - 3}{u_n} = 3 \frac{u_n - 1}{u_n}.$$

Par suite, $\frac{u_n - 1}{u_n} = 3^n \frac{u_0 - 1}{u_0}$, puis $u_n = \frac{u_0}{u_0 - 3^n(u_0 - 1)}$.

2) Calcul formel de u_n .

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{4(x-1)}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Pour n entier naturel donné, on a alors

$$\frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{\frac{4(u_n - 1)}{u_n} - 2} = \frac{u_n}{2(u_n - 2)} = \frac{u_n - 2 + 2}{2(u_n - 2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_n - 2}.$$

Par suite, $\frac{1}{u_n - 2} = \frac{n}{2} + \frac{1}{u_0 - 2}$, puis $u_n = 2 + \frac{2(u_0 - 2)}{(u_0 - 2)n + 2}$.

$$\text{n° 10 : Pour tout entier naturel } n, \text{ on a } \begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}(v_n - u_n) \\ v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n) \end{cases} .$$

La dernière relation montre que la suite $v - u$ garde un signe constant puis les deux premières relations montrent que pour tout entier naturel n , $\text{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \text{sgn}(v_n - u_n)$ et $\text{sgn}(v_{n+1} - v_n) = -\text{sgn}(v_n - u_n)$. Les suites u et v sont donc monotones de sens de variation opposés.

Si par exemple $u_0 \leq v_0$, alors, pour tout naturel n , on a :

$$u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0.$$

Dans ce cas, la suite u est croissante et majorée par v_0 et donc converge vers un certain réel ℓ . De même, la suite v est décroissante et minorée par u_0 et donc converge vers un certain réel ℓ' . Enfin, puisque pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$, on obtient par passage à la limite quand n tend vers l'infini, $\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ et donc $\ell = \ell'$. Les suites u et v sont donc adjacentes. Si $u_0 > v_0$, il suffit d'échanger les rôles de u et v .

Calcul des suites u et v .

Pour n entier naturel donné, on a $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$. La suite $v - u$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Pour tout naturel n , on a donc $v_n - u_n = \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0)$.

D'autre part, pour n entier naturel donné, $v_{n+1} + u_{n+1} = v_n + u_n$. La suite $v + u$ est constante et donc, pour tout entier naturel n , on a $v_n + u_n = v_0 + u_0$.

En additionnant et en retranchant les deux égalités précédentes, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2} \left(v_0 + u_0 + \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2} \left(v_0 + u_0 - \frac{1}{3^n}(v_0 - u_0) \right).$$

En particulier, $\ell = \ell' = \frac{u_0 + v_0}{2}$.

n° 11 : Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} - v_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - v_n)$ et donc, $u_n - v_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)$.

De même, en échangeant les rôles de u , v et w , $v_n - w_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - w_0)$ et $w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - v_0)$ (attention, cette dernière égalité n'est autre que la somme des deux premières et il manque encore une équation).

On a aussi, $u_{n+1} + v_{n+1} + w_{n+1} = u_n + v_n + w_n$ et donc, pour tout naturel n , $u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0$.

Ainsi, u_n , v_n et w_n sont solutions du système

$$\begin{cases} v_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \\ w_n - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n (w_0 - u_0) \\ u_n + v_n + w_n = u_0 + v_0 + w_0 \end{cases} .$$

Par suite, pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (2u_0 - v_0 - w_0) \right) \\ v_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 + 2v_0 - w_0) \right) \\ w_n = \frac{1}{3} \left((u_0 + v_0 + w_0) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (-u_0 - v_0 + 2w_0) \right) \end{cases} .$$

Les suites u , v et w convergent vers $\frac{u_0 + v_0 + w_0}{3}$.

n° 12 : Montrons tout d'abord que :

$$\forall (x, y, z) \in]0, +\infty[^3, (x \leq y \leq z \Rightarrow \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} \leq \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}).$$

Posons $m = \frac{x+y+z}{3}$, $g = \sqrt[3]{xyz}$ et $h = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$.

Soient y et z deux réels strictement positifs tels que $y \leq z$. Pour $x \in]0, y]$, posons

$$u(x) = \ln m - \ln g = \ln \left(\frac{x+y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (\ln x + \ln y + \ln z).$$

u est dérivable sur $]0, y]$ et pour $x \in]0, y]$,

$$u'(x) = \frac{1}{x+y+z} - \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x+x+x} - \frac{1}{3x} = 0.$$

u est donc décroissante sur $]0, y]$ et pour x dans $]0, y]$, $u(x) \geq u(y) = \ln \left(\frac{2y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (2 \ln y + \ln z)$.

Soit z un réel strictement positif fixé. Pour $y \in]0, z]$, posons $v(y) = \ln \left(\frac{2y+z}{3} \right) - \frac{1}{3} (2 \ln y + \ln z)$. v est dérivable sur $]0, z]$ et pour $y \in]0, z]$,

$$v'(y) = \frac{2}{2y+z} - \frac{2}{3z} \leq \frac{2}{3z} - \frac{2}{3z} = 0.$$

v est donc décroissante sur $]0, z]$ et pour y dans $]0, z]$, on a $v(y) \geq v(z) = 0$. On vient de montrer que $g \leq m$.

En appliquant ce résultat à $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ et $\frac{1}{z}$, on obtient $\frac{1}{g} \leq \frac{1}{h}$ et donc $h \leq g$.

Enfin, $m \leq \frac{z+z+z}{3} = z$ et $h \geq \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}} = x$. Finalement,

$$\boxed{x \leq h \leq g \leq m \leq z.}$$

Ce résultat préliminaire étant établi, puisque $0 < u_0 < v_0 < w_0$, par récurrence, les suites u , v et w sont définies puis, pour tout naturel n , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$, et de plus $u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq w_{n+1} \leq w_n \leq w_0$.

La suite u est croissante et majorée par w_0 et donc converge. La suite w est décroissante et minorée par u_0 et donc converge. Enfin, puisque pour tout entier naturel n , $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$, la suite v converge.

Soient alors a , b et c les limites respectives des suites u , v et w .

Puisque pour tout entier naturel n , on a $0 < u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n$, on a déjà par passage à la limite $0 < u_0 \leq a \leq b \leq c$. Toujours par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ b = \sqrt[3]{abc} \\ c = \frac{a+b+c}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2bc = ab + ac \\ b^2 = ac \\ a + b = 2c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2c - a \\ a^2 - 5ac + 4c^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = c) \text{ ou } (a = 4c \text{ et } b = -2c).$$

$b = -2c$ est impossible car b et c sont strictement positifs et donc, $a = b = c$.

Les suites u , v et w convergent vers une limite commune.

n° 13 : Supposons que la suite $(\sqrt[n]{v_n})$ tende vers le réel positif ℓ .

- Supposons que $0 \leq \ell < 1$. Soit $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$.

ε est un réel strictement positif et donc, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{v_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2})$.

Pour $n \geq n_0$, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur \mathbb{R}^+ , on obtient $|u_n| < \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $0 < \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$

et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que u_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

- Supposons que $\ell > 1$. $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, ($n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} > \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{1+\ell}{2}$). Mais alors, pour $n \geq n_0$, $|u_n| > \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$. Or, $\frac{1+\ell}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$, et donc $\left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Il en résulte que $|u_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit, pour α réel et n entier naturel non nul, $u_n = n^\alpha$. $\sqrt[n]{u_n} = e^{\alpha \frac{\ln n}{n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, et ceci pour toute valeur de α . Mais, si $\alpha < 0$, u_n tend vers 0, si $\alpha = 0$, u_n tend vers 1 et si $\alpha > 0$, u_n tend vers $+\infty$. Donc, si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

n° 14 : 1) Supposons $\ell > 0$. Soit ε un réel strictement positif, élément de $]0, \ell[$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}$, ($n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$).

Pour $n > n_0$, puisque $u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} \dots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} u_{n_0}$, on a $u_{n_0} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} \leq u_n \leq u_{n_0} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}$, et donc

$$(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \sqrt[n]{u_n} \leq (u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Maintenant, le membre de gauche de cet encadrement tend vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$, et le membre de droite tend vers $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, on peut trouver un entier naturel $n_1 \geq n_0$ tel que, pour $n \geq n_1$, $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) > \ell - \varepsilon$, et $(u_{n_0})^{1/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{-n_0/n} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) < \ell + \varepsilon$. Pour $n \geq n_1$, on a alors $\ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N})$, ($n \geq n_1 \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < \ell + \varepsilon$). Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers ℓ .

On traite de façon analogue le cas $\ell = 0$.

2) Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Soit u la suite définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_{2p} = a^p b^p \text{ et } u_{2p+1} = a^{p+1} b^p.$$

(on part de 1 puis on multiplie alternativement par a ou b).

Alors, $\sqrt[2p]{u_{2p}} = \sqrt{ab}$ et $\sqrt[2p+1]{u_{2p+1}} = a^{\frac{p+1}{2p+1}} b^{\frac{p}{2p+1}} \rightarrow \sqrt{ab}$. Donc, $\sqrt[n]{u_n}$ tend vers \sqrt{ab} (et en particulier converge).

On a bien sûr $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = a$ et $\frac{u_{2p+2}}{u_{2p+1}} = b$. La suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet donc deux suites extraites convergentes de limites distinctes et est ainsi divergente. La réciproque du 1) est donc fautive.

3) a) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \binom{2n}{n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{4n+2}{n+1}.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ tend vers 4 quand n tend vers $+\infty$.

b) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{n^n}{n!}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$, et donc $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e quand n tend vers $+\infty$.

c) Pour n entier naturel donné, posons $u_n = \frac{(3n)!}{n^{2n} n!}$.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n}.\end{aligned}$$

Maintenant, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-2n} = e^{-2n \ln(1+1/n)} = e^{-2n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-2+o(1)}$, et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $27e^{-2}$. Par suite, $\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$ tend vers $\frac{27}{e^2}$.

n° 15 : D'après le théorème de la limite par encadrement :

$$0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1 \Rightarrow u \text{ converge et tend vers } 1.$$

Il en est de même pour v en échangeant les rôles de u et v

n° 16 : Si $u_n^2 \rightarrow 0$, alors $|u_n| = \sqrt{|u_n^2|} \rightarrow 0$ et donc $u_n \rightarrow 0$.

Si $u_n^2 \rightarrow \ell \neq 0$, alors $(u_n) = \left(\frac{u_n^3}{u_n}\right)$ converge.

(L'exercice n'a d'intérêt que si la suite u est une suite complexe, car si u est une suite réelle, on écrit immédiatement $u_n = \sqrt[3]{u_n^3}$ (et non pas $u_n = \sqrt{u_n^2}$)).

n° 17 : Les suites u et v sont définies à partir du rang 1 et strictement positives.

Pour tout naturel non nul n , on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{(n+1) \ln(n+2) + n \ln n - (2n+1) \ln(n+1)}.$$

Pour x réel strictement positif, posons alors $f(x) = (x+1) \ln(x+2) + x \ln x - (2x+1) \ln(x+1)$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{x+1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+1}{x+1} - 2 \ln(x+1) \\ &= \frac{x+2-1}{x+2} + \ln(x+2) + 1 + \ln x - \frac{2x+2-1}{x+1} - 2 \ln(x+1) \\ &= -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} + \ln x + \ln(x+2) - 2 \ln(x+1).\end{aligned}$$

De même, f' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+1} \\ &= \frac{x(x+1)^2 - x(x+2)^2 + (x+1)^2(x+2)^2 + x(x+1)^2(x+2) - 2x(x+1)(x+2)^2}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 3x + (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 1) - 2(x^2 + x)(x^2 + 4x + 4)}{x(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{3x+4}{x(x+1)^2(x+2)^2} > 0.\end{aligned}$$

f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et donc, pour $x > 0$,

$$f'(x) < \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{t+2} + \frac{1}{t+1} + \ln \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\right) = 0.$$

Donc, f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Or, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\ln(x+2) + x\ln x - (2x+1)\ln(x+1) \\
&= (x+(x+1)-(2x+1))\ln x + (x+1)\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - (2x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{2}{x}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}} - 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

On sait que $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, et donc, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $0+0+2-2=0$. Comme f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, pour tout réel $x > 0$, on a $f(x) > \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

f est donc strictement positive sur $]0, +\infty[$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) > 0$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{f(n)} > 1$. La suite u est strictement croissante.

(Remarque. On pouvait aussi étudier directement la fonction $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ sur $]0, +\infty[$.)

On montre de manière analogue que la suite v est strictement décroissante. Enfin, puisque u_n tend vers e , et que $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)u_n$ tend vers e , les suites u et v sont adjacentes.

(Remarque. En conséquence, pour tout entier naturel non nul n , $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Par exemple, pour $n = 10$, on obtient $\left(\frac{11}{10}\right)^{10} < e < \left(\frac{11}{10}\right)^{11}$ et donc, $2,59\dots < e < 2,85\dots$ et pour $n = 100$, on obtient $1,01^{100} < e < 1,01^{101}$ et donc $2,70\dots < e < 2,73\dots$. Ces deux suites convergent vers e lentement).

n° 18 : Il est immédiat que u croît strictement et que $v - u$ est strictement positive et tend vers 0. De plus, pour n entier naturel donné,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1) \times (n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1) \times (n+1)!} < 0,$$

et la suite v est strictement décroissante. Les suites u et v sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune (à savoir e).

(Remarque. Dans ce cas, la convergence est très rapide. On a pour tout entier naturel non nul n , $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \times n!}$ et $n = 5$ fournit par exemple $2,716\dots < e < 2,718\dots$).

n° 19 : Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = 0.$$

La suite u est strictement croissante et la suite v est strictement décroissante. Enfin,

$$v_n - u_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

et la suite $v - u$ converge vers 0. Les suites u et v sont ainsi adjacentes et donc convergentes, de même limite.

n° 20 : 1) L'équation caractéristique est $4z^2 - 4z - 3 = 0$. Ses solutions sont $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Les suites cherchées sont les suites de la forme $(u_n) = \left(\lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n \right)$ où λ et μ sont deux réels (ou deux complexes si on cherche toutes les suites complexes). Si u_0 et u_1 sont les deux premiers termes de la suite u , λ et μ sont les solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = u_1 \end{cases}$ et donc $\lambda = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{4}(3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

2) Clairement $u_{2n} = \frac{1}{4^n}u_0$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{4^n}u_1$ et donc $u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n}(1 + (-1)^n)u_0 + 2 \times \frac{1}{2^n}(1 - (-1)^n)u_1 \right)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^{n+1}} ((1 + (-1)^n)u_0 + 2(1 - (-1)^n)u_1).$$

3) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Une solution particulière de l'équation proposée est une constante a telle que $4a = 4a + 3a + 12$ et donc $a = -4$.

Les solutions de l'équation proposée sont donc les suites de la forme $\left(-4 + \lambda \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{3}{2}\right)^n\right)$ où λ et μ sont les

solutions du système $\begin{cases} \lambda + \mu = 4 + u_0 \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{3\mu}{2} = 4 + u_1 \end{cases}$ et donc $\lambda = \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1)$ et $\mu = \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -4 + \frac{1}{4}(4 + 3u_0 - 2u_1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}(12 + u_0 + 2u_1) \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

4) La suite $v = \frac{1}{u}$ est solution de la récurrence $2v_{n+2} = v_{n+1} - v_n$ et donc,

(v_n) est de la forme $\left(\lambda \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{4}\right)^n \right)$ et donc $u_n = \frac{1}{\lambda \left(\frac{1 + i\sqrt{7}}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{1 - i\sqrt{7}}{4}\right)^n}$.

5) Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $(\lambda + \mu 2^n)$.

1 est racine simple de l'équation caractéristique et donc il existe une solution particulière de l'équation proposée de la forme $u_n = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$. Pour $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} u_n - 3u_{n-1} + 2u_{n-2} &= (an^4 + bn^3 + cn^2 + dn) - 3(a(n-1)^4 + b(n-1)^3 + c(n-1)^2 + d(n-1)) \\ &\quad + 2(a(n-2)^4 + b(n-2)^3 + c(n-2)^2 + d(n-2)) \\ &= a(n^4 - 3(n-1)^4 + 2(n-2)^4) + b(n^3 - 3(n-1)^3 + 2(n-2)^3) \\ &\quad + c(n^2 - 3(n-1)^2 + 2(n-2)^2) + d(n - 3(n-1) + 2(n-2)) \\ &= a(-4n^3 + 30n^2 - 52n + 29) + b(-3n^2 + 15n - 13) + c(-2n + 5) + d(-1) \\ &= n^3(-4a) + n^2(30a - 3b) + n(-52a + 15b - 2c) + 29a - 13b + 5c - d. \end{aligned}$$

$$u \text{ est solution} \Leftrightarrow -4a = 1 \text{ et } 30a - 3b = 0 \text{ et } -52a + 15b - 2c = 0 \text{ et } 29a - 13b + 5c - d = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}, b = -\frac{5}{2}, c = -\frac{49}{4}, d = -36.$$

Les suites cherchées sont les suites de la forme $\left(-\frac{1}{4}(n^3 + 10n^2 + 49n + 144) + \lambda + \mu 2^n\right)$.

6) Pour tout complexe z , $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = (z - 1)(z - 2)(z - 3)$ et les suites solutions sont les suites de la forme $(\alpha + \beta 2^n + \gamma 3^n)$.

7) Pour tout complexe z , $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 1 = (z^2 + 1)^2 - 2z(z^2 + 1) = (z - 1)^2(z^2 + 1)$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont les suites de la forme $\alpha + \beta n + \gamma i^n + \delta(-i)^n$.

1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $u_n = an^7 + bn^6 + cn^5 + dn^4 + en^3 + fn^2$. Pour tout entier naturel n , on a

$$\begin{aligned} u_{n+4} - 2u_{n+3} + 2u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n &= a((n+4)^7 - 2(n+3)^7 + 2(n+2)^7 - 2(n+1)^7 + n^7) \\ &+ b((n+4)^6 - 2(n+3)^6 + 2(n+2)^6 - 2(n+1)^6 + n^6) \\ &+ c((n+4)^5 - 2(n+3)^5 + 2(n+2)^5 - 2(n+1)^5 + n^5) \\ &+ d((n+4)^4 - 2(n+3)^4 + 2(n+2)^4 - 2(n+1)^4 + n^4) \\ &+ e((n+4)^3 - 2(n+3)^3 + 2(n+2)^3 - 2(n+1)^3 + n^3) \\ &+ f((n+4)^2 - 2(n+3)^2 + 2(n+2)^2 - 2(n+1)^2 + n^2) \\ &= a(84n^5 + 840n^4 + 4340n^3 + 12600n^2 + 19348n + 12264) \\ &+ b(60n^4 + 480n^3 + 1860n^2 + 3600n + 2764) \\ &+ c(40n^3 + 240n^2 + 620n + 600) + d(24n^2 + 96n + 124) + e(12n + 24) + 4f \\ &= n^5(84a) + n^4(840a + 60b) + n^3(4340a + 480b + 40c) + n^2(12600a + 1860b + 240c + 24d) \\ &+ n(19348a + 3600b + 620c + 96d + 12e) + (12264a + 2764b + 600c + 124d + 24e + 4f) \end{aligned}$$

u est solution si et seulement si $84a = 1$ et donc $a = \frac{1}{84}$, puis $840a + 60b = 0$ et donc $b = -\frac{1}{6}$, puis $4340a + 480b + 40c = 0$ et donc $c = \frac{17}{24}$, puis $12600a + 1860b + 240c + 24d = 0$ et donc $d = -\frac{5}{12}$ puis $19348a + 3600b + 620c + 96d + 12e = 0$ et donc $e = -\frac{59}{24}$ puis $12264a + 2764b + 600c + 124d + 24e + 4f = 0$ et donc $f = \frac{1}{12}$.

La solution générale de l'équation avec second membre est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{168}(2n^7 - 28n^6 + 119n^5 - 70n^4 - 413n^3 + 14n^2) + \alpha + \beta n + \gamma i^n + \delta(-i)^n, (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4.$$

n° 21 : Tout d'abord, on montre facilement par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , u_n existe et $u_n \geq 1$. Mais alors, pour tout entier naturel non nul n , $1 \leq u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1 + n$. Par suite, pour $n \geq 2$, $1 \leq u_n \leq n$, ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq n.$$

Supposons momentanément que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ . Dans ce cas :

$$1 + \frac{n}{u_n} = 1 + \frac{n}{\sqrt{n} + \ell + o(1)} = 1 + \sqrt{n} \frac{1}{1 + \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = 1 + \sqrt{n} \left(1 - \frac{\ell}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + 1 - \ell + o(1).$$

D'autre part,

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1} + \ell + o(1) = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} + \ell + o(1) = \sqrt{n} + \ell + o(1),$$

et donc $\ell - (1 - \ell) = o(1)$ ou encore $2\ell - 1 = 0$. Donc, si la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge vers un réel ℓ , alors $\ell = \frac{1}{2}$.

Il reste à démontrer que la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge.

On note que pour tout entier naturel non nul,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n}(-u_n^2 + u_n + n) = \frac{1}{u_n} \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) - u_n \right) \left(u_n - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4n+1}) \right).$$

Montrons par récurrence que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$. Posons $v_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$ et $w_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1})$.

- Si $n = 1$, $v_1 = 1 \leq u_1 = 1 \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = w_1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $v_n \leq u_n \leq w_n$. Alors,

$$1 + \frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1} \leq u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n} \leq 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}.$$

Mais, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+5}) - \left(1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1}\right)\right) &= \operatorname{sgn}\left((1 + \sqrt{4n+5})(1 + \sqrt{4n-3}) - 2(2n+1 + \sqrt{4n-3})\right) \\ &= \operatorname{sgn}(\sqrt{4n+5}(1 + \sqrt{4n-3}) - (4n+1 + \sqrt{4n-3})) \\ &= \operatorname{sgn}((4n+5)(1 + \sqrt{4n-3})^2 - (4n+1 + \sqrt{4n-3})^2) \quad (\text{par croissance de } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[) \\ &= \operatorname{sgn}((4n+5)(4n-2 + 2\sqrt{4n-3}) - ((4n+1)^2 + 2(4n+1)\sqrt{4n-3} + 4n-3)) \\ &= \operatorname{sgn}(-8 + 8\sqrt{4n-3}) = \operatorname{sgn}(\sqrt{4n-3} - 1) = \operatorname{sgn}((4n-3) - 1) = \operatorname{sgn}(n-1) = + \end{aligned}$$

Donc, $u_{n+1} \leq 1 + \frac{2n}{\sqrt{4n-3}+1} \leq w_{n+1}$.

D'autre part,

$$1 + \frac{2n}{\sqrt{4n+1}+1} = \frac{2n+1 + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n+1}+1} = \frac{(\sqrt{4n+1}+1)^2}{2(\sqrt{4n+1}+1)} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}) = v_{n+1},$$

et donc $v_{n+1} \leq u_{n+1} \leq w_{n+1}$.

On a montré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n-3}) \leq u_n \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{4n+1}),$$

(ce qui montre au passage que u est croissante).

Donc, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} + \sqrt{n - \frac{3}{4}} - \sqrt{n} \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n + \frac{1}{4}} - \sqrt{n},$$

ou encore, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \sqrt{n}} \leq u_n - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}}.$$

Maintenant, comme les deux suites $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{n - \frac{3}{4}} + \sqrt{n}}\right)$ et $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{n + \frac{1}{4}} + \sqrt{n}}\right)$ convergent toutes deux vers $\frac{1}{2}$,

d'après le théorème de la limite par encadrements, la suite $(u_n - \sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

n° 22 : • L'égalité proposée est vraie pour $n = 2$ car $\cos \frac{\pi}{2^2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

• Soit $n \geq 2$. Supposons que $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}}$ ($n-1$ radicaux).

Alors, puisque $\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) > 0$ (car $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ est dans $]0, \frac{\pi}{2}[$),

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots\sqrt{2}}}, \quad (n \text{ radicaux}).$$

On a montré par récurrence que,

$$\forall n \geq 2, \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux}).$$

Ensuite, pour $n \geq 2$,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right)\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} \quad (n-1 \text{ radicaux})$$

Enfin,

$$2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = 2^n \times 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^{n+1} \frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi.$$

Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \dots \sqrt{2}}} = \pi.$$

n° 23 : 1) Pour x réel positif, posons $f(x) = x - \ln(1+x)$ et $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$. f et g sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0,$$

et

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - 1 = \ln(x+1) > 0.$$

f et g sont donc strictement croissantes sur $[0, +\infty[$ et en particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 0$ et de même, $g(x) > g(0) = 0$. Finalement, f et g sont strictement positives sur $]0, +\infty[$ ou encore,

$$\forall x > 0, \ln(1+x) < x < (1+x) \ln(1+x).$$

2) Soit k un entier naturel non nul.

D'après 1), $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k} < \left(1 + \frac{1}{k}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, ce qui fournit $k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 1 < (k+1) \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, puis, par stricte croissance de la fonction exponentielle sur \mathbb{R} ,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

En multipliant membre à membre ces encadrements, on obtient pour tout naturel non nul n :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e^n < \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^{k-1}}{\prod_{k=1}^n k^k} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

De même,

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k^k}{\prod_{k=1}^n k^{k+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e} \frac{n+1}{n} (n+1)^{1/n}.$$

D'après le théorème de la limite par encadrements, comme $\frac{n+1}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini de même que $(n+1)^{1/n} = e^{\ln(n+1)/n}$, on a montré que $\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ tend vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

n° 24 : Soient x un irrationnel et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels tendant vers x (p_n entier relatif et q_n entier naturel non nul, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ n'étant pas nécessairement irréductible). Supposons que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers $+\infty$.
Donc :

$$\exists A > 0 / (\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \geq n_0 / q_n \leq A)$$

ou encore, il existe une suite extraite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est bornée.

La suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels qui est bornée, et donc cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Mais alors, on peut extraire de la suite $(q_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et donc de la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui est constante et en particulier convergente.

La suite $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{p_{\psi(n)}}{q_{\psi(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}} \times (q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite d'entiers relatifs convergente et est donc constante à partir d'un certain rang.

Ainsi, on peut extraire de la suite $(p_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et donc de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(p_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ constante. La suite $(q_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est également constante car extraite de la suite constante $(q_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et finalement, on a extrait de la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ constante.

Mais la suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x et donc la suite extraite $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x . Puisque $\left(\frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_{\sigma(n)}}{q_{\sigma(n)}} = x$ et donc x est rationnel. Ceci est une contradiction et on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$.

Enfin si la suite $(|p_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$, on peut extraire de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite bornée $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$. Mais alors, la suite $\left(\frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $x = 0$ contredisant l'irrationalité de x . Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |p_n| = +\infty$.

n° 25 : On pose $u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 1, u_4 = 0, u_5 = 1, \dots$ c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas premier} \\ 1 & \text{si } n \text{ est premier} \end{cases}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $n \geq 2$, l'entier kn est composé et donc, pour $n \geq 2, u_{kn} = 0$. En particulier, la suite $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0. Maintenant, l'ensemble des nombres premiers est infini et si p_n est le n -ième nombre premier, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. La suite $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et est constante égale à 1. En particulier, la suite $(u_{p_n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins deux suites extraites convergentes de limites distinctes et donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge bien que toutes les suites $(u_{kn})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0 pour $k \geq 2$.

n° 26 : Soit f une application de \mathbb{N} dans lui-même, injective. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

Soient A un réel puis $m = \text{Max}(0, 1 + E(A))$.

Puisque f est injective, on a $\text{card}(f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})) \leq m + 1$. En particulier, $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$ est fini (éventuellement vide).

Posons $n_0 = 1 + \begin{cases} 0 & \text{si } f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\}) = \emptyset \\ \text{Max}(f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})) & \text{sinon} \end{cases}$.

Par définition de n_0 , si $n \geq n_0, n$ n'est pas élément de $f^{-1}(\{0, 1, \dots, m\})$ et donc $f(n) > m > A$.

On a montré que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / (\forall n \in \mathbb{N}), (n \geq n_0 \Rightarrow f(n) > A)$ ou encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$.

n° 27 : Pour n entier naturel non nul et x réel positif, posons $f_n(x) = x^n + x - 1$.

Pour $x \geq 0$, $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ et donc $u_1 = \frac{1}{2}$.

Pour $n \geq 2$, f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ et pour $x \geq 0$, $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$.

f_n est ainsi continue et strictement croissante sur \mathbb{R}^+ et donc bijective de \mathbb{R}^+ sur $f_n(\mathbb{R}^+) = [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)[=$
 $[-1, +\infty[$, et en particulier,

$$\exists! x \in [0, +\infty[/ f_n(x) = 0.$$

Soit u_n ce nombre. Puisque $f_n(0) = -1 < 0$ et que $f_n(1) = 1 > 0$, par stricte croissance de f_n sur $[0, +\infty[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1.$$

La suite u est donc bornée. Ensuite, pour n entier naturel donné et puisque $0 < u_n < 1$:

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^{n+1} + u_n - 1 < u_n^n + u_n - 1 = f_n(u_n) = 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$

et donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ puis, par stricte croissance de f_{n+1} sur \mathbb{R}^+ , on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}.$$

La suite u est bornée et strictement croissante. Donc, la suite u converge vers un réel ℓ , élément de $[0, 1]$.

Si $0 \leq \ell < 1$, il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a : $u_n \leq \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2}$. Mais alors, pour $n \geq n_0$, on a

$1 - u_n = u_n^n \leq \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^n$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient $1 - \ell \leq 0$ ce qui est en contradiction avec $0 \leq \ell < 1$.
 Donc, $\ell = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

n° 28 : 1) Posons $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\text{PGCD}(p, q) = 1$. Pour tout entier naturel n , on a

$$u_{n+q} = \cos\left((n+q)\frac{2p\pi}{q}\right) = \cos\left(n\frac{2p\pi}{q} + 2p\pi\right) = \cos(na) = u_n.$$

La suite u est donc q -périodique et de même la suite v est q -périodique. Maintenant, une suite périodique converge si et seulement si elle est constante (en effet, soient T une période strictement positive de u et ℓ la limite de u . Soit $k \in \{0, \dots, T-1\}$. $|u_k - u_0| = |u_{k+nT} - u_{nT}| \rightarrow |\ell - \ell| = 0$ quand n tend vers l'infini).

- si $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $a = \frac{2p\pi}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$, $\text{PGCD}(p, q) = 1$ et $\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, alors $u_1 \neq u_0$ et la suite u n'est pas constante et donc diverge
- et si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$, la suite u est constante et donc converge.

En résumé, si $\frac{a}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, la suite u converge si et seulement si $a \in 2\pi\mathbb{Z}$ et il en est de même pour la suite v .

2)a) et b) Pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \sin((n+1)a) = \sin(na) \cos a + \cos(na) \sin a = u_n \sin a + v_n \cos a.$$

Puisque $\frac{a}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, $\sin a \neq 0$ et donc $u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos a}{\sin a}$. Par suite, si v converge alors u converge. De même, à partir de $\cos((n+1)a) = \cos(na) \cos a - \sin(na) \sin a$, on voit que si u converge alors v converge. Les suites u et v sont donc simultanément convergentes ou divergentes.

Supposons que la suite u converge, alors la suite v converge. Soient ℓ et ℓ' les limites respectives de u et v . D'après ce qui précède, ℓ et ℓ' sont solutions du système :

$$\begin{cases} \ell \sin a + \ell' \cos a = \ell' \\ \ell \cos a - \ell' \sin a = \ell. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ell \sin a + \ell'(\cos a - 1) = 0 \\ \ell(\cos a - 1) - \ell' \sin a = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $-\sin^2 a - (\cos a - 1)^2 < 0$ car $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ce système admet donc l'unique solution $\ell = \ell' = 0$ ce qui contredit l'égalité $\ell^2 + \ell'^2 = 1$. Donc, les suites u et v divergent.

3) a) Soit $E' = \{n\alpha + 2k\pi, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons que E' est dense dans \mathbb{R} et montrons que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

Soient x un réel de $[-1, 1]$ et $b = \text{Arccos } x$, de sorte que $b \in [0, \pi]$ et que $x = \cos b$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour n entier naturel et k entier relatif donnés, on a :

$$\begin{aligned} |u_n - x| &= |\cos(n\alpha) - \cos b| = |\cos(n\alpha + 2k\pi) - \cos b| = 2 \left| \sin\left(\frac{n\alpha + 2k\pi - b}{2}\right) \sin\left(\frac{n\alpha + 2k\pi + b}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{n\alpha + 2k\pi - b}{2} \right| \quad (\text{l'inégalité } |\sin x| \leq |x| \text{ valable pour tout réel } x \text{ est classique}) \\ &= |n\alpha + 2k\pi - b| \end{aligned}$$

En résumé, $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n - x| \leq |n\alpha + 2k\pi - b|$. Maintenant, si E' est dense dans \mathbb{R} , on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $|n\alpha + 2k\pi - b| < \varepsilon$ et donc $|u_n - x| < \varepsilon$.

Finalement, $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. De même, on montre que $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Il reste donc à démontrer que E' est dense dans \mathbb{R} .

b) Soit $E = \{n\alpha + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$. E est un sous groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ et donc est soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha = \inf(E \cap]0, +\infty[) > 0$, soit dense dans \mathbb{R} si $\inf(E \cap]0, +\infty[) = 0$.

Supposons par l'absurde que $\inf(E \cap]0, +\infty[) > 0$. Puisque $E = \alpha\mathbb{Z}$ et que 2π est dans E , il existe un entier naturel non nul q tel que $2\pi = q\alpha$, et donc tel que $\alpha = \frac{2\pi}{q}$.

Mais alors, α étant aussi dans E , il existe un entier relatif p tel que $\alpha = p\alpha = \frac{2p\pi}{q} \in 2\pi\mathbb{Q}$. Ceci est exclu et donc, E est dense dans \mathbb{R} .

c) Soit x dans $[-1, 1]$. D'après ce qui précède, pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\cos(n\alpha) - x| < \varepsilon$ et donc $|u_{|n|} - x| < \varepsilon$, ce qui montre que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$. De même, $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Si $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$, $\{\cos(n\alpha), n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\sin(n\alpha), n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $[-1, 1]$.

n° 29 : Soit x dans $[-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$.

Soit $\theta = \text{Arcsin } x$. Donc θ est élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x = \sin \theta$. Pour k entier naturel non nul donné, il existe un entier n_k tel que $\ln(n_k) \leq \theta + 2k\pi < \ln(n_k + 1)$ à savoir $n_k = E(e^{\theta + 2k\pi})$. Mais,

$$0 < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) = \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) < \frac{1}{n_k}$$

(d'après l'inégalité classique $\ln(1+x) < x$ pour $x > 0$, obtenue par exemple par l'étude de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$). Donc,

$$0 \leq \theta + 2k\pi - \ln(n_k) < \ln(n_k + 1) - \ln(n_k) < \frac{1}{n_k},$$

puis

$$\begin{aligned} |\sin(\theta) - \sin(\ln(n_k))| &= 2 \left| \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi + \ln(n_k)}{2}\right) \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\theta + 2k\pi - \ln(n_k)}{2} \right| = |\theta + 2k\pi - \ln(n_k)| < \frac{1}{n_k}. \end{aligned}$$

Soit alors ε un réel strictement positif.

Puisque $n_k = E(e^{\theta + 2k\pi})$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, on peut trouver un entier k tel que $\frac{1}{n_k} < \varepsilon$ et pour cet entier k , on a $|\sin \theta - \sin(\ln(n_k))| < \varepsilon$.

On a montré que $\forall x \in [-1, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^* / |x - \sin(\ln n)| < \varepsilon$, et donc

$\{\sin(\ln n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

n° 30 : Pour $\alpha \in]0, \pi[$, posons $f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)$. $\{(\sin(n\alpha), n \in \mathbb{N})\}$ est une partie non vide et majorée (par 1) de \mathbb{R} . Donc, pour tout réel α de $]0, \pi[$, $f(\alpha)$ existe dans \mathbb{R} .

Si α est dans $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq \sin \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Si α est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$. Soit n_0 l'entier naturel tel que $(n_0 - 1)\alpha < \frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha$ (n_0 existe car la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante). Alors,

$$\frac{\pi}{3} \leq n_0\alpha = (n_0 - 1)\alpha + \alpha < \frac{\pi}{3} + \alpha \leq \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Mais alors,

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) \geq |\sin(n_0\alpha)| \geq \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Si α est dans $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$, on note que

$$f(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n(\pi - \alpha))|) = f(\pi - \alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

car $\pi - \alpha$ est dans $]0, \frac{\pi}{3}]$.

On a montré que $\forall \alpha \in]0, \pi[$, $f(\alpha) \geq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc, $\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|))$ existe dans \mathbb{R} et

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = \text{Min}_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\inf_{\alpha \in]0, \pi[} (\sup_{n \in \mathbb{N}} (|\sin(n\alpha)|)) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

n° 31 : La suite u n'est pas majorée. Donc, $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N} / u_n > M$. En particulier, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / u_{n_0} \geq 0$.

Soit $k = 0$. Supposons avoir construit des entiers n_0, n_1, \dots, n_k tels que $n_0 < n_1 < \dots < n_k$ et $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $u_{n_i} \geq i$.

On ne peut avoir : $\forall n > n_k$, $u_n < k + 1$ car sinon la suite u est majorée par le nombre $\text{Max}\{u_0, u_1, \dots, u_{n_k}, k + 1\}$. Par suite, $\exists n_{k+1} > n_k / u_{n_{k+1}} \geq k + 1$.

On vient de construire par récurrence une suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ extraite de la suite u telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{n_k} \geq k$ et en particulier telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} u_{n_k} = +\infty$.

n° 32 : Si u converge vers un réel ℓ , alors $\ell \in [0, 1]$ puis, par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$, $\ell(1 - \ell) \geq \frac{1}{4}$, et donc $(\ell - \frac{1}{2})^2 \leq 0$ et finalement $\ell = \frac{1}{2}$. Par suite, si u converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

De plus, puisque la suite u est à valeurs dans $]0, 1[$, pour n naturel donné, on a :

$$u_n(1 - u_n) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - u_n\right)^2 \leq \frac{1}{4} < u_{n+1}(1 - u_n),$$

et puisque $1 - u_n > 0$, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

u est croissante et majorée. Donc u converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ (amusant).