# Planche n° 13. Comparaison des suites en l'infini

* très facile  ** facile  *** difficulté moyenne  **** difficile  ***** très difficile
I : Incontournable  T : pour travailler et mémoriser le cours

**n° 1 : (***I)** Déterminer un équivalent le plus simple possible de chacune des suites suivantes quand $n$ tend vers $+\infty$.

**1)** $\text{Arccos}\,\dfrac{n-1}{n}$ **2)** $\text{Arccos}\,\dfrac{1}{n}$ **3)** $\text{ch}(\sqrt{n})$ **4)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ **5)** $\dfrac{\text{argch}\,n}{\sqrt{n^4+n^2-1}}$

**6)** $(1+\sqrt{n})^{-\sqrt{n}}$ **7)** $\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)\ln\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)$ **8)** $(\dfrac{\pi}{2})^{3/5}-(\text{Arctan}\,n)^{3/5}$ **9)** $\sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1$

**n° 2 : (***I)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$.

**n° 3 : (***I)**

**1)** Soient $u$ et $v$ deux suites réelles strictement positives. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$ et $V_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}v_k$. Montrer que si $u_n\sim v_n$ et si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}V_n=+\infty$, alors $U_n\sim V_n$.

**2)** Application. Trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(k)$.

**n° 4 : (****)** Soit $(u_n)$ une suite réelle de limite nulle. Montrer que si $u_n+u_{2n}\sim\dfrac{3}{2n}$, alors $u_n\sim\dfrac{1}{n}$.
A-t-on : si $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{2}{n}$, alors $u_n\sim\dfrac{1}{n}$ ?

**n° 5 : (***I)** Soit $u$ la suite définie par $u_0=\dfrac{\pi}{2}$ et, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sin(u_n)$.

**1)** Montrer que la suite $u$ est strictement positive, décroissante de limite nulle.

**2)** On admet que si $u$ est une suite de limite nulle, alors, quand $n$ tend vers $+\infty$, $\sin(u_n)=u_n-\dfrac{u_n^3}{6}+o(u_n^3)$.
Déterminer un réel $\alpha$ tel que la suite $v_n=u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}$ ait une limite réelle non nulle. En appliquant le lemme de Césaro à la suite $(v_n)$, en déduire un équivalent simple de $u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.