

Planche n° 14. Matrices

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (T)** Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de \mathbb{R}^3 est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer $u(2i - 3j + 5k)$.
- 2) Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
- 3) Calculer M^2 et M^3 .
- 4) Déterminer $\text{Ker } u^2$ et $\text{Im } u^2$.
- 5) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$ et en déduire que $I - M$ est inversible. Préciser $(I - M)^{-1}$.

n° 2 : ()** Pour x réel, on pose :

$$A(x) = \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix}.$$

Déterminer $(A(x))^n$ pour x réel et n entier relatif.

n° 3 : (T)** Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique (i, j, k) de \mathbb{R}^3 est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que u est un automorphisme de \mathbb{R}^3 et déterminer u^{-1} .
- 2) Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 telle que $u(e_1) = e_1$, $u(e_2) = e_1 + e_2$ et $u(e_3) = e_2 + e_3$.
- 3) Déterminer P la matrice de passage de (i, j, k) à (e_1, e_2, e_3) ainsi que P^{-1} .
- 4) En déduire $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$ pour n entier relatif.

n° 4 : ()** Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

$$P \mapsto Q = e^{X^2}(Pe^{-X^2})'$$

- 1) Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X])$.
- 2) Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.
- 3) Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{rg } f$.

n° 5 : (I)** Soit f un endomorphisme de \mathbb{R}^3 , nilpotent d'indice 2. Montrer qu'il existe une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle

la matrice de f s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

n° 6 : ()** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Calculer A^n pour n entier relatif.

n° 7 : ()** Montrer que $\left\{ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}, x \in]-1, 1[\right\}$ est un groupe pour la multiplication des matrices.

n° 8 : (***)

- 1) Montrer qu'une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
- 2) Montrer que toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

n° 9 : (***) Soient $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $E = \{M(x, y) = xI + yJ, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

- 1) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de E et sa dimension.
- 2) Montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau commutatif.
- 3) Quels sont les inversibles de E ?
- 4) Résoudre dans E les équations suivantes :

$$\text{a) } X^2 = I \quad \text{b) } X^2 = 0 \quad \text{c) } X^2 = X.$$

- 5) Calculer $(M(x, y))^n$ pour n entier naturel non nul.

n° 10 : (****) Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer l'existence d'au moins un couple (A, B) vérifiant les conditions de l'énoncé puis calculer BA . (Indication. Calculer $(AB)^2$ et utiliser le rang.)

n° 11 : (***) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ($n \geq 2$) définie par

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

n° 12 : (***) Déterminer l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (utiliser les matrices élémentaires).

n° 13 : (***) Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{aligned} & \text{1) } \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} \quad \text{2) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} \quad \text{3) } \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{4) } (i+j+ij)_{1 \leq i,j \leq n} \\ & \text{5) } (\sin(i+j))_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{6) } \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

n° 14 : (****) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 2$) contient au moins une matrice inversible.

n° 15 : (***) (Théorème de HADAMARD).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

n° 16 : (***) Calculs par blocs.

- 1) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ avec $(A, A') \in (\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}))^2$, $(B, B') \in (\mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K}))^2$, $(C, C') \in (\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K}))^2$ et $(D, D') \in (\mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K}))^2$. Calculer $M + N$ en fonction de A, B, C, D, A', B', C' et D' .
- 2) Question analogue pour MN en analysant précisément les formats de chaque matrice.

n° 17 : (*)** (Matrice de VANDERMONDE des racines n -ièmes de l'unité).

Soit $\omega = e^{2i\pi/n}$, ($n \geq 2$). Soit $A = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1 \leq j, k \leq n}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} (calculer d'abord $A\bar{A}$).

n° 18 : (*)** (long) Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de \mathbb{C}^4 de matrice A dans la base

canonique de \mathbb{C}^4 .

- 1) Déterminer une base de \mathbb{C}^4 formée de vecteurs colinéaires à leurs images.
- 2) Ecrire les formules de changement de base correspondantes.
- 3) En déduire le calcul de A^n pour n entier naturel.

n° 19 : (*)** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$ définie par $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $a_{i,j} = C_{j-1}^{i-1}$ si $i \leq j$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse. (Indication : considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(X+1)$).

n° 20 : (*)** On pose $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n . En déduire u_n et v_n en fonction de n .
- 2) En utilisant deux combinaisons linéaires intéressantes des suites u et v , calculer directement u_n et v_n en fonction de n .