

Planche n° 14. Matrices. Corrigé

n° 1) 1) Soit $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. $MX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $u(2i - 3j + 5k) = i + 2j - 3k$.

2) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases}.$$

Donc, $\text{Ker}u = \text{Vect}(i - 2j + k)$. En particulier, $\dim(\text{Ker}u) = 1$ et, d'après le théorème du rang, $\text{rg}u = 2$. Or, $u(j) = i - j$ et $u(k) = j + k$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\text{Im}u$ qui est un plan vectoriel et donc $\text{Im}u = \text{Vect}(i - j, j + k)$.

$$\text{Ker}u = \text{Vect}(i - 2j + k) \text{ et } \text{Im}u = \text{Vect}(i - j, j + k).$$

3)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0.$$

4) $\text{Ker}u^2$ est à l'évidence le plan d'équation $x + y + z = 0$. Une base de $\text{Ker}u^2$ est $(i - j, j - k)$ et donc $\text{Ker}u^2 = \text{Im}u = \text{Vect}(i - j, j - k)$.

D'après le théorème du rang, $\text{Im}u^2$ est une droite vectorielle. Mais $u^3 = 0$ s'écrit encore $u \circ u^2 = 0$, et donc $\text{Im}u^2$ est contenue dans $\text{Ker}u$ qui est une droite vectorielle. Donc, $\text{Im}u^2 = \text{Ker}u = \text{Vect}(i - 2j + k)$.

$$\text{Ker}u^2 = \text{Im}u = \text{Vect}(i - j, j - k) \text{ et } \text{Im}u^2 = \text{Ker}u = \text{Vect}(i - 2j + k).$$

5) $(I - M)(I + M + M^2) = I - M^3 = I$. Par suite, $I - M$ est inversible à droite et donc inversible et

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

n° 2) Soient x et y deux réels.

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } y & \text{sh } y \\ \text{sh } y & \text{ch } y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y & \text{sh } x \text{ch } y + \text{ch } x \text{sh } y \\ \text{sh } x \text{ch } y + \text{ch } x \text{sh } y & \text{ch } x \text{ch } y + \text{sh } x \text{sh } y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(x + y) & \text{sh}(x + y) \\ \text{sh}(x + y) & \text{ch}(x + y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$A(x)A(-x) = A(-x)A(x) = A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

et $A(x)$ est inversible d'inverse $A(-x)$.

On a aussi, pour n entier naturel non nul donné :

$$(A(x))^n = A(x)A(x)\dots A(x) = A(x + x + \dots + x) = A(nx),$$

ce qui reste clair pour $n = 0$ car $(A(x))^0 = I_2 = A(0)$. Enfin, $(A(x))^{-n} = (A(x)^{-1})^n = A(-x)^n = A(-nx)$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (A(x))^n = A(nx) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(nx) & \operatorname{sh}(nx) \\ \operatorname{sh}(nx) & \operatorname{ch}(nx) \end{pmatrix}.$$

n° 3 1) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u(i), u(j), u(k)) = \operatorname{rg}(u(j), u(k), u(i))$. La matrice de cette dernière famille dans la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Cette dernière famille est de rang 3. Donc, $\operatorname{rg} u = 3$ et u est bien un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Posons (dans cette question uniquement) $e_1 = u(i)$, $e_2 = u(j)$ et $e_3 = u(k)$.

$$\begin{cases} e_1 = k \\ e_2 = i - 3k \\ e_3 = j + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_1 \\ i = 3e_1 + e_2 \\ j = -3e_1 + e_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^{-1}(k) = i \\ u^{-1}(i) = 3i + j \\ u^{-1}(j) = -3i + k \end{cases}$$

et donc

$$A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u^{-1}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) et 3) Posons $e_1 = xi + yj + zk$ (e_1 , e_2 et e_3 désignent d'autres vecteurs que ceux du 1)).

$$u(e_1) = e_1 \Leftrightarrow (u - \operatorname{Id})(e_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc, si on prend $e_1 = i + j + k$, on a $u(e_1) = e_1$.

Posons $e_2 = xi + yj + zk$.

$$u(e_2) = e_1 + e_2 \Leftrightarrow (u - \operatorname{Id})(e_2) = e_1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x + 1 \text{ et } z = x + 2.$$

Si on prend $e_2 = j + 2k$, on a $u(e_2) = e_1 + e_2$.

Posons $e_3 = xi + yj + zk$.

$$u(e_3) = e_2 + e_3 \Leftrightarrow (u - \operatorname{Id})(e_3) = e_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = x \text{ et } z = x + 1.$$

Si on prend $e_3 = k$, on a $u(e_3) = e_2 + e_3$.

La matrice de la famille (e_1, e_2, e_3) dans la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 3 et est donc inversible. Par suite (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 . Enfin,

$$\begin{cases} e_1 = i + j + k \\ e_2 = j + 2k \\ e_3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = e_3 \\ j = e_2 - 2e_3 \\ i = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases},$$

et donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Soit T est la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) . On a donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les formules de changement de bases s'écrivent $T = P^{-1}AP$ ou encore $A = PTP^{-1}$. Par suite, pour tout entier relatif n , $A^n = P T^n P^{-1}$.

Posons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $N^3 = 0$ et donc pour $k \geq 3$, $N^k = 0$.

Donc, pour n entier naturel supérieur ou égal à 2 donné, puisque I et N commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit

$$T^n = (I + N)^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule reste claire pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour $n = -1$, $(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I$ et donc

$$T^{-1} = (I + N)^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{(-1)(-1-1)}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la formule reste vraie pour $n = -1$. Enfin, pour n entier naturel non nul donné, $T^{-n} = \left(I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 \right)^{-1}$ mais $\left(I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 \right) \left(I - nN + \frac{-n(-n-1)}{2}N^2 \right) = I$ et donc $T^{-n} = I - nN + \frac{-n(-n-1)}{2}N^2$. Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, T^n = I + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned} A^n &= P T^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1)/2 \\ 1 & n+1 & n(n+1)/2 \\ 1 & n+2 & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (n-1)(n-2)/2 & -n(n-2) & n(n-1)/2 \\ n(n-1)/2 & -(n-1)(n+1) & n(n+1)/2 \\ n(n+1)/2 & -n(n+2) & (n+1)(n+2)/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui fournit $u^n(i)$, $u^n(j)$ et $u^n(k)$.

n° 4 1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$f(P) = e^{X^2} (P e^{-X^2})' = e^{X^2} (P' e^{-X^2} - 2X P e^{-X^2}) = P' - 2XP.$$

Ainsi, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n , $f(P) = P' - 2XP$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$, et f est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$f(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)' - 2X(\lambda P + \mu Q) = \lambda(P' - 2XP) + \mu(Q' - 2XQ) = \lambda f(P) + \mu f(Q).$$

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}_{n+1}[X]).$$

2) La matrice A cherchée est élément de $\mathcal{M}_{n+1, n}(\mathbb{R})$.

Pour $k = 0$, $f(X^k) = f(1) = -2X$ et pour $1 \leq k \leq n$, $f(X^k) = kX^{k-1} - 2X^{k+1}$. On a donc :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & n \\ \vdots & & & \ddots & -2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(P) = 0$.

Si P n'est pas nul, $-2XP$ a un degré strictement plus grand que P et donc $f(P)$ n'est pas nul. Par suite, $\text{Ker}f = \{0\}$ (f est donc injective) et d'après le théorème du rang, $\text{rg}f = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 0 = n + 1$, ce qui montre que $\text{Im}f$ n'est pas $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ (f n'est pas surjective).

n° 5 : f n'est pas nul et donc $\dim(\text{Ker}f) \leq 2$. Puisque $f^2 = 0$, $\text{Im}f \subset \text{Ker}f$. En particulier, $\dim(\text{Ker}f) \geq \text{rg}f = 3 - \dim(\text{Ker}f)$ et $\dim(\text{Ker}f) \geq \frac{3}{2}$.

Finalement, $\dim(\text{Ker}f) = 2$. $\text{Ker}f$ est un plan vectoriel (et $\text{Im}f$ est une droite vectorielle contenue dans $\text{Ker}f$).

f n'est pas nul et donc il existe e_1 tel que $f(e_1) \neq 0$ (et en particulier $e_1 \neq 0$). Posons $e_2 = f(e_1)$. Puisque $f^2 = 0$, $f(e_2) = f^2(e_1) = 0$ et e_2 est un vecteur non nul de $\text{Ker}f$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur e_3 de $\text{Ker}f$ tel que (e_2, e_3) soit une base de $\text{Ker}f$.

Montrons que (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0 \Rightarrow f(\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3) = 0 \Rightarrow \alpha e_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ (car } e_2 \neq 0).$$

Puis, comme $\beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, on obtient $\beta = \gamma = 0$ (car la famille (e_2, e_3) est libre).

Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et on a montré que (e_1, e_2, e_3) est libre. Puisque cette famille est de cardinal 3, c'est une base

de \mathbb{R}^3 . Dans cette base, la matrice A de f s'écrit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

n° 6 : Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^p de matrice A dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^p . Pour $1 \leq k \leq p$, on a $f(e_k) = e_{p+1-k}$ et donc $f^2(e_k) = e_k$. Ainsi, $A^2 = I_p$. Mais alors, A est inversible avec $A^{-1} = A$ puis pour n entier relatif donné, $A^n = I_p$ si n est pair et $A^n = A$ si n est impair.

n° 7 : Pour $x \in]-1, 1[$, posons $M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$. Posons ensuite $G = \{M(x), x \in]-1, 1[\}$.

Soit alors $x \in]-1, 1[$. Posons $a = \text{argth} x$ de sorte que $x = \text{th} a$. On a

$$M(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \text{ch } a \begin{pmatrix} 1 & \text{th } a \\ \text{th } a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix}.$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, posons $N(a) = \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix}$. On a ainsi $\forall x \in]-1, 1[$, $M(x) = N(\text{argth } x)$ ou aussi, $\forall a \in \mathbb{R}$, $N(a) = M(\text{th} a)$. Par suite, $G = \{N(a), a \in \mathbb{R}\}$.

Soit alors $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} N(a)N(b) &= \begin{pmatrix} \text{ch } a & \text{sh } a \\ \text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{ch } b & \text{sh } b \\ \text{sh } b & \text{ch } b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh } a \text{sh } b & \text{sh } a \text{ch } b + \text{sh } b \text{ch } a \\ \text{sh } a \text{ch } b + \text{sh } b \text{ch } a & \text{ch } a \text{ch } b + \text{sh } a \text{sh } b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(a+b) & \text{sh}(a+b) \\ \text{sh}(a+b) & \text{ch}(a+b) \end{pmatrix} = N(a+b). \end{aligned}$$

Montrons alors que G est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

- $N(0) = I_2 \in G$ et donc G est non vide.
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $\det(N(a)) = \text{ch}^2 a - \text{sh}^2 a = 1 \neq 0$ et donc $G \subset \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $N(a)N(b) = N(a+b) \in G$.

$$\forall a \in \mathbb{R}, (N(a))^{-1} = \begin{pmatrix} \text{ch } a & -\text{sh } a \\ -\text{sh } a & \text{ch } a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(-a) & \text{sh}(-a) \\ \text{sh}(-a) & \text{ch}(-a) \end{pmatrix} = N(-a) \in G.$$

On a montré que

G est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

n° 8 : 1) La démonstration la plus simple apparaîtra dans le chapitre suivant : le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. Cette matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul ou encore si et seulement si aucun des coefficients diagonaux n'est nul.

Pour l'instant, le plus simple est d'utiliser le rang d'une matrice. Si aucun des coefficients diagonaux n'est nul, on sait que le rang de la matrice est son format et donc que cette matrice est inversible.

Réciproquement, notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Supposons que A soit une matrice triangulaire inférieure dont le coefficient ligne i , colonne i , est nul. Si $i = n$, la dernière colonne de A est nulle et A n'est pas de rang n et donc n'est pas inversible. Si $i < n$, alors les $n - i + 1$ dernières colonnes sont dans $\text{Vect}(e_{i+1}, \dots, e_n)$ qui est de dimension au plus $n - i (< n - i + 1)$, et encore une fois, la famille des colonnes de A est liée et A n'est pas inversible.

2) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure et f l'endomorphisme de \mathbb{K}^n de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{K}^n . Soit $\mathcal{B}' = (e_n, \dots, e_1)$. \mathcal{B}' est encore une base de \mathbb{K}^n . Soient alors P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' puis A' la matrice de f dans la base \mathcal{B}' . Les formules de changement de bases permettent d'affirmer que $A' = P^{-1}AP$ et donc que A et A' sont semblables.

Vérifions alors que A' est une matrice triangulaire inférieure. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, posons $e'_i = e_{n+1-i}$. A est triangulaire supérieure. Donc, pour tout i , $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$. Mais alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e'_{n+1-i}) \in \text{Vect}(e'_n, \dots, e'_{n+1-i})$ ou encore, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e'_i) \in \text{Vect}(e'_n, \dots, e'_i)$. Ceci montre que A' est une matrice triangulaire inférieure.

n° 9 : 1) $E = \text{Vect}(I, J)$. Donc, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Puisque J n'est pas une matrice scalaire, la famille (I, J) est libre et donc est une base de E . Par suite, $\dim E = 2$.

$$2) J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I. \text{ Plus généralement, pour } (x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4,$$

$$M(x, y)M(x', y') = (xI + yJ)(x'I + y'J) = xx'I + (xy' + yx')J + yy'J^2 = (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J (*).$$

Montrons alors que $(E, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

E contient $I = 1I + 0J$. Ensuite, puisque $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $(E, +)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ et enfin, d'après (*), E est stable pour \times . Donc, $(E, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$.

3) Soit $((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$M(x, y)M(x', y') = I \Leftrightarrow (xx' - yy')I + (xy' + yx' + 2yy')J = I \Leftrightarrow \begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + (x + 2y)y' = 0 \end{cases} \quad (\text{car } (I, J) \text{ est libre}).$$

Le déterminant de ce dernier système d'inconnues x' et y' vaut $x(x + 2y) + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. Si $y \neq -x$, ce système admet un et un seul couple solution. Par suite, si $y \neq -x$, il existe $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(x, y)M(x', y') = I$. Dans ce cas, la matrice $M(x, y)$ est inversible dans E .

Si $y = -x$, le système s'écrit $\begin{cases} x(x' + y') = 1 \\ -x(x' + y') = 0 \end{cases}$ et n'a clairement pas de solution.

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, xI + yJ$ est inversible dans E si et seulement si $y \neq -x$.

4) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x, y)^2 = I \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2y(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Dans E , l'équation $X^2 = I$ admet exactement deux solutions à savoir I et $-I$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$M(x, y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2y(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -x.$$

Dans E , l'équation $X^2 = 0$ admet pour solutions les matrices de la forme $\lambda(J - I) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x, y)^2 = M(x, y) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2y(x + y) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ y(2x + 2y - 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = x \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ x^2 - (-x + \frac{1}{2})^2 = x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \frac{1}{4} = 0 \\ y = -x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dans E , l'équation $X^2 = X$ admet exactement deux solutions à savoir 0 et I .

n° 10 : Soit (i, j) la base canonique de \mathbb{R}^2 et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .
On cherche $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que

$$f \circ g(e_1) = -e_2 + e_3, \quad f \circ g(e_2) = -e_1 + e_3 \quad \text{et} \quad f \circ g(e_3) = -e_1 - e_2 + 2e_3 (= f \circ g(e_1 + e_2)).$$

On pose $g(e_1) = i$, $g(e_2) = j$ et $g(e_3) = i + j$, puis $f(i) = -e_2 + e_3$ et $f(j) = -e_1 + e_3$. Les applications linéaires f et g conviennent, ou encore si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{alors } AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A et B désignent maintenant deux matrices quelconques, éléments de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ respectivement, telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Calculons } (AB)^2. \quad \text{On obtient}$$

$$(AB)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = AB.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par B à gauche et A à droite, on obtient

$$(BA)^3 = (BA)^2 (*).$$

Notons alors que

$$\text{rg}(BA) \geq \text{rg}(ABAB) = \text{rg}((AB)^2) = \text{rg}(AB) = 2,$$

et donc, BA étant une matrice carrée de format 2 , $\text{rg}(BA) = 2$. BA est donc une matrice inversible. Par suite, on peut simplifier les deux membres de l'égalité $(*)$ par $(BA)^2$ et on obtient

$$BA = I_2.$$

n° 11 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{C}^n et $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille d'éléments de \mathbb{C}^n de matrice A dans la base \mathcal{B} .

Par définition, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad e'_i = ie_i + \sum_{j=i+1}^n e_j \quad \text{et} \quad e'_n = ne_n.$$

En retranchant membre à membre ces égalités, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad e'_i - e'_{i+1} = i(e_i - e_{i+1}) \quad \text{et} \quad e'_n = ne_n,$$

ou encore

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad e_i - e_{i+1} = \frac{1}{i}(e'_i - e'_{i+1}) \quad \text{et} \quad e_n = \frac{1}{n}e'_n.$$

Mais alors, pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=i}^{n-1} (e_j - e_{j+1}) + e_n = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j}(e'_j - e'_{j+1}) + \frac{1}{n}e'_n = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j-1}e'_j + \frac{1}{n}e'_n \\ &= \frac{1}{i}e'_i + \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j}e'_j - \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j-1}e'_j \\ &= \frac{1}{i}e'_i - \sum_{j=i+1}^n \frac{1}{j(j-1)}e'_j \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que $\mathbb{C}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(e'_1, \dots, e'_n)$, ce qui montre que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est génératrice de \mathbb{C}^n et donc une base de \mathbb{C}^n . Par suite, A est inversible et

$$A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = (a'_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \text{ où } a'_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{i} & \text{si } i = j \\ -\frac{1}{i(i-1)} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases} .$$

n° 12 : Soit $A = (a_{k,l})_{1 \leq k, l \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A commute avec toute matrice, en particulier : $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. Maintenant,

$$AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} E_{k,j} \text{ et } E_{i,j}A = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{i,j} E_{k,l} = \sum_{l=1}^n a_{j,l} E_{i,l} .$$

On note que si $k \neq i$ ou $l \neq j$, $E_{k,j} \neq E_{i,l}$. Puisque la famille $(E_{u,v})$ est libre, on peut identifier les coefficients et on obtient : si $k \neq i$, $a_{k,i} = 0$. D'autre part, le coefficient de $E_{i,j}$ est $a_{i,i}$ dans la première somme et $a_{j,j}$ dans la deuxième. Ces coefficients doivent être égaux.

Finalement, si A commute avec toute matrice, ses coefficients non diagonaux sont nuls et ses coefficients diagonaux sont égaux. Par suite, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$. Réciproquement, si A est une matrice scalaire, A commute avec toute matrice.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / A = \lambda I_k).$$

n° 13 : 1)

$$\begin{aligned} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & m \end{pmatrix} &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 1/12 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2 - \frac{1}{2}C_1, C_3 - \frac{1}{3}C_1)) \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/12 & 0 \\ 1/3 & 1/12 & m - \frac{7}{36} \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2, C_3 - C_2)) \end{aligned}$$

Si $m = \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 2$ (on note alors que $C_1 = 6(C_2 - C_3)$) et si $m \neq \frac{7}{36}$, $\text{rg}A = 3$ et A est inversible.

2)

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & a-b & a-c \\ bc & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(C_1, C_2, C_3) = \text{rg}(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1))$$

1er cas. si a, b et c sont deux à deux distincts.

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & b-c \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc, si a, b et c sont deux à deux distincts alors $\text{rg}A = 3$.

2ème cas. Si $b = c \neq a$ (ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$). A a même rang que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 1 \\ bc & c & b \end{pmatrix}$ puis que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+c & 1 & 0 \\ bc & c & 0 \end{pmatrix}$.

Donc, si $b = c \neq a$ ou $a = c \neq b$ ou $a = b \neq c$, $\text{rg}A = 2$.

3ème cas. Si $a = b = c$, il est clair dès le départ que A est de rang 1.

3) Puisque $\text{rg}(C_1, C_2, C_3, C_4) = \text{rg}(C_1, C_2 - aC_1, C_3 - C_1, C_4 - bC_1)$,

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & b & 1 \\ 1 & b & 1 & a \\ b & 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ 1 & b-a & 0 & a-b \\ b & 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix}$$

1er cas. Si $a \neq b$,

$$\begin{aligned} \text{rg}A &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & b-a & 1-ab \\ b-a & 0 & a-b \\ 1-ab & a-b & 1-b^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1-a^2 & 1 & 1-ab \\ 1-ab & -1 & 1-b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{rg}(L_1, L_2, L_3) = \text{rg}(L_2, L_1, L_3)). \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 2-a^2-ab \\ 1-ab & -1 & 2-b^2-ab \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (2-b^2-ab) - (2-a^2-ab) \end{pmatrix} \\ &= 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1 & 0 \\ 1-ab & -1 & (a-b)(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $|a| \neq |b|$, $\text{rg}A = 4$ et si $a = -b \neq 0$, $\text{rg}A = 3$.

2ème cas. Si $a = b$,

$$\text{rg}A = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 0 & 0 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix} = 1 + \text{rg} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 1-a^2 \\ 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Si $a = b = \pm 1$, $\text{rg}A = 1$ et si $a = b \neq \pm 1$, $\text{rg}A = 2$.

4) Pour $n \geq 2$ et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons C_j la j -ème colonne de la matrice proposée.

$$C_j = (i + j + ij)_{1 \leq i \leq n} = (i)_{1 \leq i \leq n} + j(i+1)_{1 \leq i \leq n} = j\mathbf{U} + \mathbf{V},$$

$$\text{avec } \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \vdots \\ i+1 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j \in \text{Vect}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ ce qui montre que $\text{rg}A \leq 2$. De plus, les deux premières colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires et donc $\text{rg}A \geq 2$. Finalement $\text{rg}A = 2$.

5) On suppose $n \geq 2$. La j -ème colonne de la matrice s'écrit

$$C_j = (\sin i \cos j + \sin j \cos i)_{1 \leq i \leq n} = \sin j \mathbf{C} + \cos j \mathbf{S} \text{ avec } \mathbf{C} = (\cos i)_{1 \leq i \leq n} \text{ et } \mathbf{S} = (\sin i)_{1 \leq i \leq n}.$$

Par suite, $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $C_j \in \text{Vect}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$ ce qui montre que $\text{rg}A \leq 2$. De plus, les deux premières colonnes de A ne sont pas colinéaires car le déterminant de la matrice formée des termes lignes et colonnes 1 et 2 vaut $\sin 2 \sin 4 - \sin^2 3 = -0,7\dots$ et en particulier n'est pas nul. Finalement $\text{rg}A = 2$.

6) Déterminons $\text{Ker}A$. Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \text{Ker}A \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \alpha x_i + b x_{i+1} = 0 \text{ et } b x_1 + \alpha x_n = 0 \text{ (S)}.$$

1er cas. Si $a = b = 0$, alors clairement $\text{rg}A = 0$.

2ème cas. Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors (S) $\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $x_i = 0$. Dans ce cas, $\text{Ker}A = \{0\}$ et donc $\text{rg}A = n$.

3ème cas. Si $a \neq 0$ et $b = 0$, clairement $\text{rg}A = n$.

4ème cas. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Posons $\alpha = -\frac{a}{b}$.

$$\begin{aligned} \text{(S)} &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, x_{k+1} = \alpha x_k \text{ et } x_1 = \alpha x_n \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k = \alpha^{k-1} x_1 \text{ et } x_1 = \alpha x_n \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k = \alpha^{k-1} x_1 \text{ et } \alpha^n x_1 = x_1. \end{aligned}$$

Mais alors, si $\alpha^n \neq 1$, le système (S) admet l'unique solution $(0, \dots, 0)$ et $\text{rg}A = n$, et si $\alpha^n = 1$,

$\text{Ker}A = \text{Vect}((1, \alpha^{n-1}, \dots, \alpha^2, \alpha))$ est de dimension 1 et $\text{rg}A = n - 1$.

En résumé, si $a = b = 0$, $\text{rg}A = 0$ et si $a = 0$ et $b \neq 0$, $\text{rg}A = n$. Si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \in \mathcal{U}_n$, $\text{rg}A = n - 1$ et si $a \neq 0$ et $-\frac{b}{a} \notin \mathcal{U}_n$, $\text{rg}A = n$.

n° 14 : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $H = \text{Ker}f$.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, posons $f(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{i,j} a_{i,j}$. En particulier, $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $f(E_{i,j}) = \alpha_{i,j}$.

1er cas. Supposons $\exists (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 / i \neq j$ et $\alpha_{i,j} \neq 0$. On pose alors $S = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k}$ et on considère $A = \sum_{k=1}^n E_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} E_{i,j}$.

A est triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls et est donc inversible.

De plus, $f(A) = \sum_{k=1}^n \alpha_{k,k} - \frac{S}{\alpha_{i,j}} \alpha_{i,j} = S - S = 0$ et A est élément de H .

2ème cas. Supposons $\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, ($i \neq j \Rightarrow \alpha_{i,j} = 0$). Alors, $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,i} a_{i,i}$. Soit $A = E_{n,1} + E_{2,1} + E_{3,2} + \dots + E_{n-1,n}$. A est inversible car par exemple égale à la matrice de passage de la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n à la base $(e_n, e_1, \dots, e_{n-1})$. De plus, $f(A) = 0$.

n° 15 : Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur du noyau de A . Supposons $X \neq 0$.

Soit i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}\{|x_i|, i \in \{1, \dots, n\}\}$. On a $|x_{i_0}| > 0$. Mais alors,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0 \\ &\Rightarrow |a_{i_0, i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \end{aligned}$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$.

On a ainsi montré que $\text{Ker}A \neq \{0\} \Rightarrow \exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket / |a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$.

Par contraposition, on alors : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \Rightarrow \text{Ker}(A) = \{0\} \Rightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

n° 16 : 1) Soit $(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j , de la matrice $M + N$ est la somme du coefficient ligne i , colonne j , de la matrice M et du coefficient ligne i , colonne j , de la matrice N ou encore la somme du coefficient ligne i , colonne j , de la matrice A et du coefficient ligne i , colonne j , de la matrice A' . On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i,j) et donc

$$M + N = \begin{pmatrix} A + A' & B + B' \\ C + C' & D + D' \end{pmatrix}.$$

2) Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K})$, puis $A' \in \mathcal{M}_{t,p}(\mathbb{K})$, $B' \in \mathcal{M}_{u,p}(\mathbb{K})$, $C' \in \mathcal{M}_{t,q}(\mathbb{K})$, $D' \in \mathcal{M}_{u,q}(\mathbb{K})$ (le découpage de M en colonne est le même que le découpage de N en lignes).

Soit alors $(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket \times \llbracket 1, t \rrbracket$. Le coefficient ligne i , colonne j de la matrice MN vaut

$$\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j} = \sum_{k=1}^p m_{i,k} n_{k,j} + \sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}.$$

Mais, $\sum_{k=1}^p m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i , colonne j du produit AA' et $\sum_{k=p+1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i , colonne j du produit BC' . Finalement, $\sum_{k=1}^{p+q} m_{i,k} n_{k,j}$ est le coefficient ligne i , colonne j du produit $AA' + BC'$. On a des résultats analogues pour les autres valeurs du couple (i, j) et donc

$$MN = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

n° 17 : Soient k et l deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq l \leq n$. Le coefficient ligne k , colonne l de $A\bar{A}$ vaut :

$$\sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(l-1)} = \sum_{j=1}^n (\omega^{k-l})^{j-1}.$$

1er cas. Si $k = l$, $\omega^{k-l} = 1$, et le coefficient vaut $\sum_{j=1}^n 1 = n$.

2ème cas. Si $k \neq l$. On a $-(n-1) \leq k-l \leq n-1$ avec $k-l \neq 0$ et donc, $k-l$ n'est pas multiple de n . Par suite, $\omega^{k-l} \neq 1$ et

$$\sum_{j=1}^n (\omega^{k-l})^{j-1} = \frac{1 - (\omega^{k-l})^n}{1 - \omega^{k-l}} = \frac{1 - 1^{k-l}}{1 - \omega^{k-l}} = 0.$$

En résumé, $A\bar{A} = nI_n$. Donc A est inversible à gauche et donc inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{n} \bar{A}.$$

n° 18 : 1) Un vecteur non nul x est colinéaire à son image si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Les nombres λ correspondants sont les complexes tels qu'il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ ou encore tels que $A - \lambda I_4 \notin \mathcal{GL}_4(\mathbb{C})$.

La matrice $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7-\lambda & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6-\lambda & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11-\lambda \end{pmatrix}$ a même rang que les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 7-\lambda & 0 & 0 \\ -7-\lambda & -12 & 0 & 0 \\ 11 & 20 & -6-\lambda & -6-\lambda \\ -6 & -12 & 11-\lambda & 6 \end{pmatrix} \quad (C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ et } C_3 \leftrightarrow C_4)$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ \times & \times & -12 & 0 \\ \times & \times & \times & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{pmatrix} \quad (C_2 \leftarrow 4C_2 - (7-\lambda)C_1 \text{ et } C_4 \leftarrow 12C_4 + (-6-\lambda)C_3)$$

Ainsi, si $\lambda \in \{-1, 1, 2, 3\}$, $\text{rg}(A - \lambda I_4) \leq 3$ et donc $A - \lambda I_4 \notin \mathcal{GL}_4(\mathbb{C})$ et si $\lambda \notin \{-1, 1, 2, 3\}$, $\text{rg}(A - \lambda I_4) = 4$ et donc $A - \lambda I_4 \in \mathcal{GL}_4(\mathbb{C})$

$$A - \lambda I_4 \notin \mathcal{GL}_4(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 1, 2, 3\}.$$

- Cas $\lambda = -1$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$.

$$(x, y, z, t) \in \text{Ker}(u + \text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 4y = 0 \\ -12x - 6y = 0 \\ 20x + 11y - 5z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 12t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -2x - 5z - 12t = 0 \\ z + 2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -2t \\ -2x - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ t = -x \\ z = 2x \end{cases}.$$

Donc, $\text{Ker}(u + \text{Id}) = \text{Vect}(e_1)$ où $e_1 = (1, -2, 2, -1)$.

- **Cas $\lambda = 1$.** Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \text{Ker}(u - \text{Id}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 0 \\ -12x - 8y = 0 \\ 20x + 11y - 7z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 10t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ 20x + 11y - 7z - 12t = 0 \\ -6x - 3y + 3z + 5t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ 14z + 24t = 7x \\ 6z + 10t = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \\ t = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(u - \text{Id}) = \text{Vect}(e_2)$ où $e_2 = (2, -3, 1, 0)$.

- **Cas $\lambda = 2$.** Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \text{Ker}(u - 2\text{Id}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 4y = 0 \\ -12x - 9y = 0 \\ 20x + 11y - 8z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 9t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = -\frac{3}{2}t \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(u - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_3 = (0, 0, 3, -2)$.

- **Cas $\lambda = 3$.** Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \text{Ker}(u - 3\text{Id}) &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -12x - 10y = 0 \\ 20x + 11y - 9z - 12t = 0 \\ -12x - 6y + 6z + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 3z + 4t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ z = -\frac{4}{3}t \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc, $\text{Ker}(u - 3\text{Id}) = \text{Vect}(e_4)$ où $e_4 = (0, 0, 4, -3)$.

Soit P la matrice de la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) dans la base canonique (i, j, k, l) . On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Montrons que P est inversible et déterminons son inverse.

$$\begin{aligned} \begin{cases} e_1 = i - 2j + 2k - l \\ e_2 = 2i - 3j + k \\ e_3 = 3k - 2l \\ e_4 = 4k - 3l \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ e_1 = i - 2j + 2(3e_3 - 2e_4) - (4e_3 - 3e_4) \\ e_2 = 2i - 3j + (3e_3 - 2e_4) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ i - 2j = e_1 - 2e_3 + e_4 \\ 2i - 3j = e_2 - 3e_3 + 2e_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3e_3 - 2e_4 \\ l = 4e_3 - 3e_4 \\ i = -3e_1 + 2e_2 + e_4 \\ j = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{C}^4 = \text{Vect}(i, j, k, l) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$. Donc, la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est génératrice de \mathbb{C}^4 et donc une base de \mathbb{C}^4 . Ainsi, P est inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

2) Les formules de changement de bases s'écrivent $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(-1, 1, 2, 3)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^n .

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3(-1)^n & -2(-1)^n & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 3 \times 2^n & 4 \times 2^n \\ 3^n & 0 & -2 \times 3^n & -3 \times 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3(-1)^n + 4 & -2(-1)^n + 2 & 0 & 0 \\ 6(-1)^n - 6 & 4(-1)^n - 3 & 0 & 0 \\ -6(-1)^n + 2 + 4 \times 3^n & -4(-1)^n + 1 + 3 \times 2^n & 9 \times 2^n - 8 \times 3^n & 12(2^n - 3^n) \\ 3((-1)^n - 3^n) & 2((-1)^n - 2^n) & 6(3^n - 2^n) & -8 \times 2^n + 9 \times 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

n° 19 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à un polynôme P de degré inférieur ou égal à n , associe le polynôme $P(X + 1)$. Par la formule du binôme de NEWTON, on voit que A est la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. f est clairement un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, sa réciproque étant l'application qui, à un polynôme P associe le polynôme $P(X - 1)$.

A est donc inversible et $A^{-1} = (b_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ où $b_{i,j} = 0$ si $i > j$ et $b_{i,j} = (-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1}$ si $i \leq j$.

n° 20 : 1) Posons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de sorte que $A = I + J$. On a $J^2 = 2J$ et donc, plus généralement : $\forall k \geq 1, J^k = 2^{k-1}J$. Mais alors, puisque I et J commutent, la formule du binôme de NEWTON fournit pour n entier naturel non nul donné :

$$\begin{aligned} A^n &= (I + J)^n = I + \sum_{k=1}^n C_n^k J^k = I + \left(\sum_{k=1}^n C_n^k 2^{k-1} \right) J = I + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k 2^k - 1 \right) J \\ &= I + \frac{1}{2} ((1 + 2)^n - 1) J = I + \frac{1}{2} (3^n - 1) J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $n = 0$. Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Pour n entier naturel donné, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel n , on a alors $X_{n+1} = AX_n$ et donc,

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n + 1}{2} \\ \frac{3^n - 1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} + v_{n+1} = 3(u_n + v_n)$. Donc, la suite $u + v$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n = 3^n \text{ (I)}.$$

De même, pour tout entier naturel n $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$. Donc, la suite $u + v$ est une suite constante. Puisque $u_0 - v_0 = 1$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - v_n = 1 \text{ (II)}.$$

En additionnant et en retranchant (I) et (II), on retrouve

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3^n + 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$