Planche n° 15. Dénombrements

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (IT)

1) (***) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\sum \binom{n}{2k} = \sum \binom{n}{2k+1}$ ou encore démontrer directement qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

2) (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

3) (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

n° 2 : (***) Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ? (Si E est un ensemble à pq éléments et si A_1,..., A_p sont p parties de E, A_1,..., A_p forment une partition de E si et seulement si tout élément de E est dans une et une seule des parties A_i. Il revient au même de dire que la réunion des A_i est E et que les A_i sont deux à deux disjoints.)

n° 3 : (***) Combinaisons avec répétitions. Montrer que le nombre de solutions en nombres entiers $x_i \geq 0$ de l'équation $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ (k entier naturel donné) est C_{n+k-1}^k. (Noter $a_{n,k}$ le nombre de solutions et procéder par récurrence.)

n° 4 : (*) Combien y a-t-il de nombres de 5 chiffres où 0 figure une fois et une seule ?

n° 5 : (*I)** Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geq 23$, on a $p_n \geq \frac{1}{2}$.

n° 6 : (***) Montrer que le premier de l'an tombe plus souvent un dimanche qu'un samedi.

n° 7 : (I)** On part du point de coordonnées $(0, 0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p, q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

n° 8 : (*I)** De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

n° 9 : (****)

1) Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et A_1,..., A_n, n parties de E. Montrer la « formule du crible » :

$$\begin{aligned}\text{card}(A_1 \cup ... \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ &+ ... + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) \\ &+ ... + (-1)^{n-1} \text{card}(A_1 \cap ... \cap A_n).\end{aligned}$$

2) Combien y a-t-il de permutations σ de $\{1, ..., n\}$ vérifiant $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\sigma(i) \neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe)). Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).
On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

n° 10 : (**) Combien y a-t-il de surjections de $\{1, ..., n+1\}$ sur $\{1, ..., n\}$?

n° 11 : (***) Soit (P) un polygone convexe à n sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

n° 12 : (***)

1) On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.

2) On donne n plans de l'espace. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourants en une droite, ni quatre qui soient concourants en un point. Déterminer le nombre $Q(n)$ de régions délimitées par ces plans.

n° 13 : (***) Soit P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes.

Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leq k \leq n-1$.

Dresser un tableau pour $1 \leq k, n \leq 5$.

Calculer en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.