Planche n° 16. Equations différentielles linéaires : corrigé

Exercice n° 1

Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_h) l'équation homogène associée.

1) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) sur I et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h) sur I.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x\ln x\, f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\ \ln x\, f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (f \times \ln)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x)\ln x = x + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{x+\lambda}{\ln x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x(1+x^2)}$.

Les fonctions $x \mapsto \frac{3}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) sur I et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h) sur I.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ xf'(x) + 3f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ x^3f'(x) + 3x^2f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x^3f)'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ x^3f(x) = x - \operatorname{Arctan} x + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x - \operatorname{Arctan} x + \lambda}{x^3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{x - \operatorname{Arctan} x + \lambda}{x^3},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

3) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \frac{2-x}{(1-x)^2}y = 0$.

La fonction $x \mapsto -\frac{2-x}{(1-x)^2}$ est continue sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme λf_1 où f_1 est une solution particulière non nulle de (E) sur I.

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (1-x)^2f'(x) - (2-x)f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) - \frac{2-x}{(1-x)^2}f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) - \frac{1+1-x}{(1-x)^2}f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \left(-\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right)f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\frac{1}{x-1} + \ln|1-x|}f'(x) + \left(-\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}\right)e^{\frac{1}{x-1} + \ln|1-x|}f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ \left((1-x)e^{\frac{1}{x-1}}f\right)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x)e^{\frac{1}{x-1}}f(x) = \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \lambda\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,1[}=\left\{x\mapsto \lambda\frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{1-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

4) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y'+\dfrac{1}{x}y=1+\dfrac{1}{x^2}$.

Les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto 1+\dfrac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ x(xf'(x)+f(x)-x)=1 \Leftrightarrow \forall x\in I,\ (xf)'(x)=x+\frac{1}{x}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ xf(x)=\frac{x^2}{2}+\ln(-x)+\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)+\lambda}{x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[}=\left\{x\mapsto \frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\lambda}{x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

5) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y'+\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x^3}{2}$.

Les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{2x}$ et $x\mapsto\dfrac{x^3}{2}$ sont continues sur $I=]-\infty,0[$ et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur I} &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=\frac{x^3}{2}\\ &\Leftrightarrow \forall x\in I,\ e^{\ln|x|/2}f'(x)+\frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}f(x)=\frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x\in I,\ \left(\sqrt{-x}\,f\right)'(x)=-\frac{1}{2}(-x)^{7/2}\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ \sqrt{-x}\,f(x)=\frac{1}{9}(-x)^{9/2}+\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in I,\ f(x)=\frac{x^4}{9}+\frac{\lambda}{\sqrt{-x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[}=\left\{x\mapsto \frac{x}{2}+\frac{\ln(-x)}{x}+\frac{\lambda}{x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

6) Les fonctions $x\mapsto 2$ et $x\mapsto x^2-3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0+\lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

1ère solution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_h) sont les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda e^{-2x}$.

Déterminons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto ax^2+bx+c$.

$$\left(ax^2+bx+c\right)'+2\left(ax^2+bx+c\right)=2ax+b+2ax^2+2bx+2c=2ax^2+2(a+b)x+b+2c.$$

puis

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \left(ax^2+bx+c\right)'+2\left(ax^2+bx+c\right)=x^2-3x &\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ 2ax^2+2(a+b)x+b+2c=x^2-3x\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2a=1\\ 2(a+b)=-3\\ b+2c=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-2\\ c=1\end{array}\right..\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{x^2}{2}-2x+1+\lambda e^{-2x},\ \lambda\in\mathbb{R}$.

2ème solution. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x) = (x^2-3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^{2x}f\right)'(x) = (x^2-3x)e^{2x}$$

• **Recherche d'une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$.**

1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned}\int (x^2-3x)e^{2x}\ dx &= \frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x-3)e^{2x}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2-3x\right)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x-3)e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx \\ &= \frac{1}{4}\left(2x^2-8x+3\right)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + \lambda = \frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right)e^{2x} + \lambda\end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons les primitives de $x \mapsto (x^2-3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$$\left(\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}\right)' = \left(2\left(ax^2+bx+c\right) + (2ax+b)\right)e^{2x} = \left(2ax^2 + 2(a+b)x + b + 2c\right)e^{2x}.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left(\left(ax^2+bx+c\right)e^{2x}\right)' = \left(x^2-3x\right)e^{2x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2(a+b) = -3 \\ b + 2c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right. .$$

• **Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$.**

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \left(e^{2x}f\right)'(x) = \left(x^2-3x\right)e^{2x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)e^{2x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

7) Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+2e^x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(1+2e^x\right) + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+2e^x\right) + \lambda\right)e^{-x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln\left(1+2e^x\right) + \lambda\right)e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

8) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' - \dfrac{\cos x}{\sin x}y = -\dfrac{1}{\sin x}$.

Les fonctions $x \mapsto -\dfrac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{\sin x}$ sont continues sur $I =]0,\pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Mais $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_h) sur I et $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0,\pi[$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \{x \mapsto \lambda \sin x + \cos x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

Exercice n° 2

1) La fonction $x \mapsto \operatorname{th} x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme λf_0 où f_0 est une solution particulière non nulle de (E).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x)\operatorname{th} x = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x f'(x) + \operatorname{sh} x f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (\operatorname{ch} \times f)'(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{ch} x f(x) = \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\lambda}{\operatorname{ch} x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit f une telle fonction. $f(0) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} 0} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y\operatorname{th} x = 0$ prenant la valeur 1 en 0 est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

2) Les fonctions $x \mapsto \operatorname{th} x$ et $x \mapsto x\operatorname{th} x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

D'après 1), on peut prendre $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$. Déterminons une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ par la méthode de variation de la constante. Il existe une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ de la forme $f_0 : \lambda(x) f_1(x)$ où λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lambda' f_0 = x\operatorname{th} x$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) f_0(x) = x\operatorname{th} x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\lambda'(x)}{\operatorname{ch} x} = x\operatorname{th} x \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \lambda'(x) = x\operatorname{sh} x.$$

Or, $\displaystyle\int x\operatorname{sh} x\ dx = x\operatorname{ch} x - \int^{\operatorname{ch}} x\ dx = x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C$, $C \in \mathbb{R}$. On peut donc prendre $\lambda : x \mapsto x\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ puis $f_0 : x \mapsto x - \operatorname{th} x$. Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x - \operatorname{th} x + \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit f une telle fonction. $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + \dfrac{\lambda}{\operatorname{ch} 0} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y\operatorname{th} x = x\operatorname{th} x$ prenant la valeur 0 en 0 est la fonction $x \mapsto x - \operatorname{th} x$.

Exercice n° 3

L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_h) l'équation homogène associée.

Soit I l'un des deux intervalles $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{-2x}{1 - x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{x^2}{1 - x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_h).

Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (1 - x^2) f'(x) - 2x f(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ ((1 - x^2) f)'(x) = x^2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1 - x^2) f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x^3 + \lambda}{3(1 - x^2)},
\end{aligned}$$

(en renommant λ la constante 3λ (λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si 3λ décrit $\mathbb{R}$ car l'application $t \mapsto 3t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même)).

Résolution de (E) sur $I =]-1, +\infty[$. Soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 etλ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \dfrac{x^3 + \lambda_1}{3(1 - x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x^3 + \lambda_2}{3(1 - x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.

En résumé, une éventuelle solution de (E) sur I est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} \text{ si } -1 < x < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ \dfrac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} \text{ si } x > 1 \end{array}\right. .$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $]-1,1[$ et solution de (E) sur $]-1,1[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur $]1,+\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x=1$. Donc, f est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.

Pour $-1 < x < 1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\dfrac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} + \dfrac{1}{2}}{x-1} = \frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1+\lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1 \neq -1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1, f n'est pas dérivable à droite en -1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Dans ce cas, pour $x \in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x) = \frac{x^3-1}{3(1-x^2)} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)} = -\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x = 1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$, nécessairement pour $x > -1$, $f(x) = -\dfrac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

Sur $]-1,+\infty[$, (E) admet une et une seule solution à savoir la fonction $x \mapsto -\dfrac{x^2+x+1}{3(x+1)}$.

Résolution de (E) **sur** $\mathbb{R}$. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $]-1,+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$. L'équation (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 4

Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ |x|f'(x) + (x-1)f(x) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ xf'(x) + (x-1)f(x) = x^3 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) + \left(1-\frac{1}{x}\right)f(x) = x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x) + \left(1-\frac{1}{x}\right)e^{x-\ln x}f(x) = e^{x-\ln x}x^2 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x) = xe^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x) = ((x-1)e^x)' \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = xe^{-x}((x-1)e^x+\lambda) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = x^2 - x + \lambda xe^{-x} \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto x^2 - x + \lambda xe^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
\text{f solution de (E) sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ f'(x)+\left(-1+\frac{1}{x}\right)f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+(-1+\frac{1}{x})e^{-x+\ln|x|}f(x)=-e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}y)'=x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x\mapsto x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$$\begin{aligned}
((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})' &= (-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x}\\
&= (-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e^{-x},
\end{aligned}$$

et

$$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})'=x^3e^{-x}\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-a=1\\ 3a-b=0\\ 2b-c=0\\ c-d=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}a=-1\\ b=-3\\ c=-6=d\end{array}\right. .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(*) &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x)=(x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]-\infty,0[,\ f(x)=x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur $]-\infty,0[$ sont les fonctions de la forme $x\mapsto x^2+3x+6+\dfrac{\lambda e^x+6}{x}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

On peut montrer qu'il existe une solution et une seule sur $\mathbb{R}$ mais on manque encore d'outils pour le prouver.

Exercice n° 5

1) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$ est $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x\mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y''-2y'+2y=\frac{1}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}\right).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=e^{(1+i)x}$.

$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x\mapsto(ax)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz, pour tout réel x

$$\begin{aligned}
f''(x)-2f'(x)+2f(x) &= \left[(1+i)^2(ax)+2(1+i)(a)-2\left((1+i)(ax)+a\right)+2(ax)\right]e^{(1+i)x}\\
&= [2(1+i)a-2a)]\,e^{(1+i)x}\\
&= 2iae^{(1+i)x}.
\end{aligned}$$

puis,

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f''(x)-2f'(x)+2f(x)=e^{(1+i)x}\Leftrightarrow 2ia=1\Leftrightarrow a=-\frac{i}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=e^{(1+i)x}$ est $x\mapsto -\dfrac{ix}{2}e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y=e^{(1-i)x}$ est $x\mapsto\dfrac{ix}{2}e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$.

$-1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{(-1+i)x}$. Pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = a((-1+i)^2 - 2(-1+i) + 2)e^{(-1+i)x} = 4ae^{(1+i)x}$$

puis, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = e^{(-1+i)x} \Leftrightarrow 4a = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$.

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^{(-1+i)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4}e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = e^{(-1-i)x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{4}e^{(-1-i)x}$.

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = \cos x \operatorname{ch} x$ est donc

$$\frac{1}{4} \times 2\mathrm{Re}\left(\frac{ix}{2}e^{(1+i)x} + \frac{1}{4}e^{(-1+i)x}\right) = \frac{1}{8}\mathrm{Re}\left(2ix(\cos x + i\sin x)e^{x} + (\cos x + i\sin x)e^{-x}\right) = \frac{1}{8}\left(-2x\sin xe^{x} + \cos xe^{-x}\right).$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{8}\left(-2x\sin xe^{x} + \cos xe^{-x}\right) + (\lambda\cos x + \mu\sin x)e^{x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $r^2 + 6r + 9 = 0$ qui admet la racine double $r = -3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{2x}$. Pour tout réel x, $f''(x) + 6f'(x) + 9f(x) = 25ae^{2x}$ puis,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + 6f'(x) + 9f(x) = e^{2x} \Leftrightarrow 25a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{25}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{25}e^{2x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{25}e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{-3x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

3) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet la racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{x}(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\dfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{x}$.

1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ax^2e^{x}$. D'après la formule de Leibniz, pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = ((ax^2 + 2(2ax) + 2a) - 2(ax^2 + (2ax)) + ax^2)e^{2x} = 2ae^{x},$$

puis,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^{x} \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{x}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}e^{x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.

-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{-x}$. Pour tout réel x,

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = (a + 2a + a)e^{-x} = 4ae^{-x},$$

puis,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme $x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} + \lambda x + \mu\right) e^x + \frac{1}{8}e^{-x}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

4) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = 0$ est $r^2 - 2kr + 1 + k^2 = 0$ dont le discriminant réduit vaut $-1 = i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k + i$ et $k - i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$. Résolvons donc l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.

Puisque $k \neq 1$, $1+i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{(1+i)x}$. Or, pour tout réel x

$$f''(x) - 2kf'(x) + (1 + k^2)f(x) = a\left((1 + i)^2 - 2k(1 + i) + 1 + k^2\right) e^{(1+i)x} = ((k - 1)^2 - 2(k - 1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2kf'(x) + (1 + k^2)f(x) = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{(k - 1)(k - 1 - 2i)} \Leftrightarrow a = \frac{k - 1 + 2i}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{k - 1 - 2i}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ est

$$\frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}\mathrm{Im}\left((k - 1 - 2i)(\cos x + i \sin x)e^x\right) = \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2 \cos x + (k - 1) \sin x)e^x.$$

Les solutions de l'équation proposée sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2 \cos x + (k - 1) \sin x)e^x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{kx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}.$$

Exercice n° 6

1) Soit z une fonction définie sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Soit $y = \frac{1}{z}$. Alors y ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ et $z = \frac{1}{y}$.
Puisque z ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$, z est dérivable sur $]1, +\infty[$ si et seulement si y est dérivable sur $]1, +\infty[$. De plus

Soient donc z une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$ qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$ puis $y = \frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned}
z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur }]1, +\infty[&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ -x^2z'(x) + xz(x) = z^2(x)\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ -x^2\left(\frac{1}{y}\right)'(x) + \frac{x}{y(x)} = \frac{1}{y^2(x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ x^2\frac{y'(x)}{y^2(x)} + \frac{x}{y(x)} = \frac{1}{y^2(x)}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ x^2y'(x) + xy(x) = 1.
\end{aligned}$$

z est solution de (E_1) sur $]1, +\infty[$ si et seulement si y est une solution de (E_2) : $x^2y'(x) + xy(x) = 1$ sur $]1, +\infty[$ et ne s'annulant pas sur $]1, +\infty[$.

2) Soit y une fonction dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in]1, +\infty[,\ x^2y'(x) + xy(x) = 1 &\Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ xy'(x) + y(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \forall x \in]1, +\infty[,\ (xy)'(x) = \frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ xy'(x) = \ln(x) + \lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]1, +\infty[,\ y'(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{x}.
\end{aligned}$$

De plus, comme $\ln(x)+\lambda=0 \Leftrightarrow e=e^{-\lambda}$, y ne s'annule pas sur $]1,+\infty[$ si et seulement si $\lambda>0$.

Les solutions de de (E_1) sur $]1,+\infty[$ qui ne s'annulent pas sur $I=]1,+\infty[$ sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+\lambda}$, $\lambda>0$, ou encore (en posant $a=e^{\lambda}$ de sorte que $a>1$ et $\lambda=\ln a$) les fonctions de la forme

$$x\mapsto \frac{x}{\ln(ax)},\ a>1.$$

Exercice n° 7

1) Supposons y deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $\varphi\ :\ t\mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, la fonction $z=y\circ\varphi$ (de sorte que pour tout réel t, $z(t)=y\left(e^t\right)$) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $\varphi^{-1}\ :\ x\mapsto\ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $y=z\circ\varphi^{-1}$ (de sorte que pour tout réel $x>0$, $y(x)=z(\ln x)$) est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

Finalement y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout réel t, posons donc $x=e^t$ puis, $z(t)=y(x)=y(e^t)$.
Alors,

$$z'(t)=e^ty'(e^t)=xy'(x)$$

puis

$$z''(t)=e^ty'(e^t)+(e^t)^2y''(e^t)=xy'(x)+x^2y''(x).$$

Donc, $xy'(x)=z'(t)$ et $x^2y''(x)=z''(t)-xy'(x)=z''(t)-z'(t)$ et

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=a(z''(t)-z'(t))+bz'(t)+cz(t)=az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t).$$

Donc,

$$\forall x>0,\ ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0.$$

3) On applique le 2) avec $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. L'équation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors $z''-2z'+z=0$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^t$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda x\ln x+\mu x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice n° 8

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g\ :\ x\mapsto\lambda e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\ dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Dans ce cas, pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T)=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\displaystyle\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\ dt$. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\ dt&=\int_0^{T}e^{at}f(t)\ dt+\int_T^{x+T}e^{at}f(t)\ dt=\int_0^{T}e^{at}f(t)\ dt+\int_0^{x}e^{a(u+T)}f(u+T)\ du\\&=\int_0^{T}e^{at}f(t)\ dt+e^{aT}\int_0^{x}e^{au}f(u)du.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(x+T)&=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{T}e^{at}f(t)\ dt+e^{-ax}\int_0^{x}e^{au}f(u)\ du\\&=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{T}e^{at}f(t)\ dt+g(x)-\lambda e^{-ax}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
g \text{ est T-périodique} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ g(x+T)-g(x)=0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda\left(e^{-a(x+T)}-e^{-ax}\right)+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt=0\\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-ax}\left(\lambda\left(e^{-aT}-1\right)+e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt=0\right)\\
&\Leftrightarrow \lambda(1-e^{-aT})=e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\ (\text{car } \forall x \in \mathbb{R},\ e^{-ax}\neq 0)\\
&\Leftrightarrow \lambda=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\ (a\neq 0 \text{ et } T\neq 0 \Rightarrow e^{-at}\neq 1).
\end{aligned}$$

D'où l'existence et l'unicité d'une solution T-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x)=\left(\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\right)e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt.$$

Exercice n° 9

1) On résout $(\mathscr{E})$: $\dot{x}+\dfrac{x}{\tau}=\dfrac{x_\infty}{\tau}$ avec $x(0)=x_0$. Cette équation est du type $y'+ay=b$ où a et b sont deux constantes réelles.

1ère solution. La fonction constante $t\mapsto x_\infty$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto e^{-\frac{t}{\tau}}$ est une solution non nulle de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$. Donc les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x\ :\ t\mapsto x_\infty+\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

2ème solution.

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ \dot{x}(t)+\frac{x(t)}{\tau}=\frac{x_\infty}{\tau} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\frac{t}{\tau}}\dot{x}(t)+\frac{1}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}x(t)=\frac{x_\infty}{\tau}e^{\frac{t}{\tau}}\\
&\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{\tau}}x\right)(t)=x_\infty\frac{e^{\frac{t}{\tau}}}{\tau}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ e^{\frac{t}{\tau}}x(t)=x_\infty e^{\frac{t}{\tau}}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t)=x_\infty+\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $x\ :\ t\mapsto x_\infty+\lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Ensuite $x(0)=x_0 \Leftrightarrow x_\infty+\lambda=x_0 \Leftrightarrow \lambda=x_0-x_\infty$. La solution au problème posé est la fonction

$$\boxed{x\ :\ t\mapsto x_\infty+(x_0-x_\infty)\,e^{-\frac{t}{\tau}}.}$$

Remarque. Pour tout condition initiale x_0, la fonction x tend vers x_∞ quand t tend vers $+\infty$.

2) L'équation $(\mathscr{E})$: $RC\dfrac{dU}{dt}+U=E$ qui s'écrit encore $\dfrac{dU}{dt}+\dfrac{1}{RC}U=\dfrac{E}{RC}$ est du type $y'+ay=b$ où a et b sont deux constantes réelles.

1ère solution. La fonction constante $t\mapsto E$ est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto e^{-\frac{t}{RC}}$ est une solution non nulle de $(\mathscr{E}_h)$ sur $\mathbb{R}$. Donc les solutions de $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $U\ :\ t\mapsto E+\lambda e^{-\frac{t}{RC}}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

2ème solution.

$$\begin{aligned}
\forall t\geqslant 0,\ RC\frac{dU}{dt}(t)+U(t)=E \Leftrightarrow \forall t\geqslant 0\frac{dU}{dt}(t)+\frac{1}{RC}U(t)=\frac{E}{RC} &\Leftrightarrow \forall t\geqslant 0,\ e^{\frac{t}{RC}}\frac{dU}{dt}(t)+\frac{1}{RC}e^{\frac{t}{RC}}U(t)=\frac{E}{RC}e^{\frac{t}{RC}}\\
&\Leftrightarrow \forall t\geqslant 0,\ \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{RC}}U\right)(t)=E\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{RC}\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\geqslant 0,\ e^{\frac{t}{RC}}U(t)=Ee^{\frac{t}{RC}}+\lambda\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\geqslant 0,\ U(t)=E+\lambda e^{-\frac{t}{RC}}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto E + \lambda e^{-\frac{t}{RC}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ensuite $U(0) = U_0 \Leftrightarrow E + \lambda = U_0 \Leftrightarrow \lambda = U_0 - E$. La solution au problème posé est la fonction

$$\boxed{U \ : \ t \mapsto E + (U_0 - E)\, e^{-\frac{t}{RC}}.}$$

Remarque. Si $U_0 > E$ alors $U_0 - E > 0$. La fonction U est décroissante et tend vers $U_\infty = E$. Le condensateur se décharge.
Si $U_0 < E$ alors $U_0 - E < 0$. La fonction U est croissante et tend vers $U_\infty = E$. Le condensateur se charge.
Si $U_0 = E$, la fonction U est constante.

Les équations qui suivent sont du type $ay'' + by' + cy = f(t)$ où a, b et c sont des constantes réelles. La solution générale est somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation associée.

3) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est $z^2 + \omega_0^2 = 0$ dont les solutions sont non réelles et conjuguées à savoir $z_1 = i\omega_0$ et $z_2 = -i\omega_0$.

On sait que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $t \mapsto B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$, $(B, C) \in \mathbb{R}^2$ ou encore $t \mapsto A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $(A, \varphi) \in [0, +\infty[\times\mathbb{R}$ avec $A = \sqrt{B^2 + C^2}$.

a) Les condition initiales $x(t_0) = x_0$ et $\dot{x}(t_0) = v_0$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} B\cos(\omega_0 t_0) + C\sin(\omega_0 t_0) = x_0 \\ -B\omega_0\sin(\omega_0 t_0) + C\omega_0\cos(\omega_0 t_0) = v_0 \end{array}\right. .$$

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t_0) & \sin(\omega_0 t_0) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t_0) & \omega_0\cos(\omega_0 t_0) \end{vmatrix} = \omega_0$. Les formules de Cramer fournissent

$$B = \frac{1}{\omega_0}\begin{vmatrix} x_0 & \sin(\omega_0 t_0) \\ v_0 & \omega_0\cos(\omega_0 t_0) \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega_0}\left(\omega_0\cos(\omega_0 t_0)\, x_0 - \sin(\omega_0 t_0)\, v_0\right),$$

et

$$C = \frac{1}{\omega_0}\begin{vmatrix} \cos(\omega_0 t_0) & x_0 \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t_0) & v_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega_0}\left(\cos(\omega_0 t_0)\, v_0 + \omega_0\sin(\omega_0 t_0)\, x_0\right).$$

Une situation courante est $v_0 = 0$ et on obtient la solution

$$x \ : \ t \mapsto x_0\left(\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t_0) + \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t_0)\right) = x_0\cos(\omega_0(t - t_0)).$$

b) La fonction constante $t \mapsto \dfrac{A}{\omega_0^2}$ est une solution particulière de l'équation et donc les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $t \mapsto \dfrac{A}{\omega_0^2} + B\cos(\omega_0 t) + C\sin(\omega_0 t)$, $(B, C) \in \mathbb{R}^2$. Le calcul de B et C est analogue au calcul fait en a).

4) circuits RLC

Dans les deux cas, l'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $(E_c) : z^2 + 2\lambda z + \omega_0^2 = 0$. Le discriminant réduit de cette équation est

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2.$$

λ est un réel positif et ω_0 est un réel strictement positif. On a trois cas :

1er cas. Si $\lambda > \omega_0$, alors $\Delta' > 0$ et donc (E_c) admet deux solutions réelles distinctes $r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ et $r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$.
On note que $r_1 r_2 = \omega_0^2 > 0$ et donc r_1 et r_2 sont deux réels non nuls et de même signe puis que $r_1 + r_2 = -2\lambda < 0$ et donc r_1 et r_2 sont strictement négatifs.

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$q \ : \ t \mapsto Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}, \ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2ème cas. Si $\lambda = \omega_0$, alors $\Delta' = 0$ et (E_c) admet une solution réelle double $r = -\lambda < 0$.
On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$q\ :\ t \mapsto (At+B)\,e^{-\lambda t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

3ème cas. Si $\lambda < \omega_0$, alors $\Delta' < 0$ et donc (E_c) admet deux solutions non réelles conjuguées $r_1 = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ et $r_2 = -\lambda - i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. On note que $2\mathrm{Re}\,(r_1) = r_1 + \overline{r_1} = r_1 + r_2 = -2\lambda < 0$.

On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$q\ :\ t \mapsto (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\,e^{-\lambda t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2,$$

où $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pseudo-pulsation.

a) Dans tous les cas, la fonction constante $t \mapsto \dfrac{E}{L\omega_0^2} = EC$ est une solution particulière de l'équation. Donc,

1er cas. Si $\lambda > \omega_0$, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$q\ :\ t \mapsto EC + Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2,$$

avec $r_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ et $r_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$. Les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} A + B = -EC \\ -r_1 A - r_2 B = 0 \end{array}\right.$$

Le déterminant du système est $r_1 - r_2 = 2\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \neq 0$. Les formules de Cramer fournissent

$$A = \frac{ECr_2}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} = \frac{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)EC}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} \text{ et } B = \frac{-r_1 EC}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}\frac{\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)EC}{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}.$$

On note que la solution tend vers $q_\infty = EC$.

2ème cas. Si $\lambda = \omega_0$, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$q\ :\ t \mapsto EC + (At+B)\,e^{-\lambda t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2.$$

Les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} B = -EC \\ A - \lambda B = 0 \end{array}\right.,$$

et donc

$$A = -\lambda EC \text{ et } B = -EC.$$

La solution s'écrit $q\ :\ t \mapsto EC\left(1 - (\lambda t + 1)\,e^{-\lambda t}\right)$. On note que la solution tend vers $q_\infty = EC$ quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées.

3ème cas. Si $\lambda < \omega_0$, les solutions sont les fonctions de la forme

$$q\ :\ t \mapsto EC + (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))\,e^{-\lambda t},\ (A,B)\in\mathbb{R}^2,$$

où $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ est la pseudo-pulsation.

Les conditions initiales $q(0) = 0$ et $\dot{q}(0) = 0$ fournissent

$$\left\{\begin{array}{l} A = -EC \\ -\lambda A - \Omega B = 0 \end{array}\right.,$$

et donc

$$A = -EC \text{ et } B = -\frac{\lambda EC}{\Omega}.$$

La solution s'écrit $q\ :\ t \mapsto EC\left(1 - \left(\cos(\Omega t) + \dfrac{\lambda}{C}\sin(\Omega t)\right)e^{-\lambda t}\right)$. On note que la solution tend vers $q_\infty = EC$ quand t tend vers $+\infty$.

