

# Planche n° 16. Arithmétique

\* très facile    \*\* facile    \*\*\* difficulté moyenne    \*\*\*\* difficile    \*\*\*\*\* très difficile  
 I : Incontournable    T : pour travailler et mémoriser le cours

**n° 1 : (\*\*)** Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

**n° 2 : (\*\*\*)T)**

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{Z}, 6|5n^3 + n$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 7|4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ .

**n° 3 : (\*\*\*)IT)** Un entier de la forme  $8n + 7$  ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

**n° 4 : (\*\*IT)** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$  où  $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . Montrer que  $a_n \wedge b_n = 1$ .

**n° 5 : (\*\*\*\*)** Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{n+1}$  divise  $E((1 + \sqrt{3})^{2n+1})$ .

**n° 6 : (\*\*\*)IT)** Soient  $A$  la somme des chiffres de  $4444^{4444}$  et  $B$  la somme des chiffres de  $A$ . Trouver la somme des chiffres de  $B$ . (Commencer par majorer la somme des chiffres de  $n = a_0 + 10a_1 + \dots + 10^p a_p$ .)

**n° 7 : (\*\*)** Montrer que si  $p$  est premier et  $8p^2 + 1$  est premier alors  $8p^2 - 1$  est premier.

**n° 8 : (\*\*I)**

- 1) Montrer que  $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, [k \wedge n = 1 \Rightarrow n|C_n^k]$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)|C_{2n}^n$ .

**n° 9 : (\*\*T)** Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1) \begin{cases} x + y = 56 \\ x \vee y = 105 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \wedge y = x - y \\ x \vee y = 72 \end{cases} \quad 3) x \vee y - x \wedge y = 243.$$

**n° 10 : (\*\*\*\*)** Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

**n° 11 : (\*\*\*)IT)** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $F_n = 2^{2^n} + 1$  (nombres de FERMAT). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

**n° 12 : (\*\*\*\*)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 0, u_1 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  (suite de FIBONACCI).

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$  et en déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \wedge u_{n+1} = 1$ .
- 2) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}^*, u_{m+n} = u_m u_{n+1} + u_{m-1} u_n$  et en déduire que  $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$  pour  $m$  et  $n$  non nuls.

**n° 13 : (\*\*\*)I)** On veut résoudre dans  $\mathbb{Z}^3$  l'équation  $x^2 + y^2 = z^2$  (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple  $(3, 4, 5)$ ).

- 1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où  $x \wedge y \wedge z = 1$ . Montrer alors que dans ce cas,  $x, y$  et  $z$  sont de plus deux à deux premiers entre eux.
- 2) On suppose que  $x, y$  et  $z$  sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres  $x, y$  et  $z$  sont impairs le troisième étant pair puis que  $z$  est impair.

On suppose dorénavant que  $x$  et  $z$  sont impairs et  $y$  est pair. On pose  $y = 2y', X = \frac{z+x}{2}$  et  $Z = \frac{z-x}{2}$ .

- 3) Montrer que  $X \wedge Z = 1$  et que  $X$  et  $Z$  sont des carrés parfaits.
- 4) En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

$$(d(u^2 - v^2), 2d uv, d(u^2 + v^2))$$

où  $d \in \mathbb{N}, (u, v) \in \mathbb{Z}^2$ , à une permutation près des deux premières composantes.

n° 14 : (\*\*) Résoudre dans  $\mathbb{N}^2$  l'équation  $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ .

n° 15 : (\*\*\*) Résoudre dans  $(\mathbb{N}^*)^2$  l'équation d'inconnue  $(x, y) : \sum_{k=1}^x k! = y^2$ .

n° 16 : (\*\*\*) Montrer que  $n = 4...48...89$  ( $p$  chiffres 4 et  $p - 1$  chiffres 8 et donc  $2p$  chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

n° 17 : (\*\*\*) Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple,  $37.1 = 37$ ,  $37.2 = 74$ ,  $37.3 = 111$ ).

n° 18 : (\*\*\*) Soit  $u_n = 10...01_2$  ( $n$  chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

$$1) u_n^2 \quad 2) u_n^3 \quad 3) u_n^3 - u_n^2 + u_n.$$

n° 19 : (\*\*I)

1) Déterminer en fonction de  $n$  entier non nul, le nombre de chiffres de  $n$  en base 10.

2) Soit  $\sigma(n)$  la somme des chiffres de  $n$  en base 10.

a) Montrer que la suite  $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n \geq 1}$  est bornée. Cette suite converge-t-elle ?

b) Montrer que pour tout naturel non nul  $n$ ,  $1 \leq \sigma(n) \leq 9(1 + \log n)$ .

c) Montrer que la suite  $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n \geq 1}$  converge et préciser sa limite.

n° 20 : (\*\*\*)

1) (Formule de LEGENDRE) Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $p$  un nombre premier. Etablir que l'exposant de  $p$  dans la décomposition de  $n!$  en facteurs premiers est

$$E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + E\left(\frac{n}{p^3}\right) + \dots$$

2) Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de  $1000!$  ?

n° 21 : (\*\*\*) (Petit théorème de FERMAT) Soit  $p$  un nombre premier.

1) Montrer que, pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq p - 1$ ,  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .

2) Montrer que  $\forall a \in \mathbb{N}^*$ ,  $a^p \equiv a \pmod{p}$  (par récurrence sur  $a$ ).

n° 22 : (\*\*\*) (Théorème de WILSON) Soit  $p$  un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :  $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow p$  est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).