Planche n° 17. Polynômes

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (*I)** Calculer $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n}$, $b_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ et $c_n = \prod_{k=1}^{n} \tan\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ en éliminant tous les cas particuliers concernant a.

n° 2 : (***) On pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $Q = 1 + 2X + \ldots + nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k)$.

n° 3 : (***) Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n(n-1)$. (Indication. Poser $x_k = \text{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ puis trouver un polynôme dont les x_k sont les racines.)

n° 4 : (**I)**

1) Soient p un entier naturel et a un réel. Donner le développement de $(\cos a + i \sin a)^{2p+1}$ puis en choisissant astucieusement a, déterminer $\sum_{k=1}^{p} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2p+1}$. En déduire alors $\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}}$.

2) Pour n entier naturel non nul, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge (pour majorer u_n, on remarquera que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$).

3) Montrer que pour tout réel x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\text{cotan}\, x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

4) En déduire un encadrement de u_n puis la limite de (u_n).

n° 5 : (IT)** Déterminer le PGCD de $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ et $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$.

n° 6 : (T)** Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $(X+1)^n - X^n - 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

n° 7 : (***) Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe deux polynômes R et S à coefficients réels tels que $P = R^2 + S^2$.

n° 8 : (**) Soit P un polynôme différent de X. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - X$.

n° 9 : (***) Soit P un polynôme à coefficients entiers relatifs de degré supérieur ou égal à 1. Soit n un entier relatif et $m = P(n)$.

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(n + km)$ est un entier divisible par m.

2) Montrer qu'il n'existe pas de polynômes non constants à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit premier pour tout entier n.

n° 10 : (***) (Polynômes P vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$)
Soit E la partie de $\mathbb{C}[X]$ formée des polynômes P vérifiant $\forall a \in \mathbb{Z},\ P(a) \in \mathbb{Z}$.

1) On pose $P_0 = 1$ et pour n entier naturel non nul, $P_n = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X + k)$ (on peut définir la notation $P_n = C_{X+n}^{n}$). Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n \in E$.

2) Montrer que toute combinaison linéaire à coefficients entiers relatifs des P_n est encore un élément de E.

3) Montrer que E est l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_n.

n° 11 : (***) Division euclidienne de $P = \sin a X^n - \sin(na)X + \sin((n-1)a)$ par $Q = X^2 - 2X\cos a + 1$, a réel donné.

n° 12 : (*I)** (Théorème de LUCAS.) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1. Montrer que les racines de P' sont barycentres à coefficients positifs des racines de P (on dit que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P). Indication : calculer $\dfrac{P'}{P}$.

n° 13 : (***) Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

n° 14 : (*T)** Trouver un polynôme de degré 5 tel que $P(X)+10$ soit divisible par $(X+2)^3$ et $P(X)-10$ soit divisible par $(X-2)^3$.

n° 15 : (*I)** Trouver les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(X^2)=P(X)P(X+1)$ (penser aux racines de P).

n° 16 : (T)** Déterminer $a \in \mathbb{C}$ tel que $P = X^5 - 209X + a$ admette deux zéros dont le produit vaut 1.

n° 17 : (*T)** Soit $(a_k)_{1\leq k\leq 5}$ la famille des racines de $P = X^5 + 2X^4 - X - 1$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{a_k+2}{a_k-1}$.

n° 18 : (**) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ (resp. $\mathbb{C}^4$) le système :

$$\textbf{1)}\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \qquad \textbf{2)}\ \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ x^2+y^2+z^2+t^2=10 \\ x^3+y^3+z^3+t^3=0 \\ x^4+y^4+z^4+t^4=26 \end{array}\right. .$$

n° 19 : (T)** Trouver tous les polynômes P vérifiant $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

n° 20 : (I)** Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$, où les a_i sont des entiers relatifs, a_0 et a_n étant non nuls. Soient p et q deux entiers relatifs non nuls et premiers entre eux. Montrer que si $\dfrac{p}{q}$ est racine de P alors p divise a_0 et q divise a_n.

n° 21 : (**) Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $12X^4 + X^3 + 15X^2 - 20X + 4$.

n° 22 : (***) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(X-1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$ est divisible par $2X^3 - 3X^2 + X$ puis déterminer le quotient.

n° 23 : (I)** Déterminer deux polynômes U et V vérifiant $UX^n + V(1-X)^m = 1$ et $\deg(U) < m$ et $\deg(V) < n$.