

Planche n° 17. Polynômes. Corrigé

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 :

1) Soit $n \geq 2$. On a

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2i} (e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}) = \frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} \prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}).$$

Maintenant,

$$\prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = e^{\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+(n-1))} = e^{i\pi(n-1)/2} (e^{i\pi/2})^{n-1} = i^{n-1},$$

et donc $\frac{1}{(2i)^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1} e^{ik\pi/n} = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Il reste à calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n})$.

1ère solution. Les $e^{-2ik\pi/n}$, $1 \leq k \leq n-1$, sont les $n-1$ racines n -ièmes de 1 distinctes de 1 et puisque $X^n - 1 = (X-1)(1+X+\dots+X^{n-1})$, ce sont donc les $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme $1+X+\dots+X^{n-1}$. Par suite, $1+X+\dots+X^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{-2ik\pi/n})$, et en particulier $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}) = 1+1+\dots+1 = n$.

2ème solution. Pour $1 \leq k \leq n-1$, posons $z_k = 1 - e^{-2ik\pi/n}$. Les z_k sont deux à deux distincts et racines du polynôme $P = (1-X)^n - 1 = -nX + \frac{n(n-1)}{2}X^2 - \dots + (-1)^n X^n = X \left(-n + \frac{n(n-1)}{2}X - \dots + (-1)^n X^{n-1} \right)$. Maintenant, $z_k = 0 \Leftrightarrow e^{-2ik\pi/n} = 1 \Leftrightarrow k \in n\mathbb{Z}$ (ce qui n'est pas pour $1 \leq k \leq n-1$). Donc, les z_k , $1 \leq k \leq n-1$, sont $n-1$ racines deux à deux distinctes du polynôme de degré $n-1$: $-n + X - \dots + (-1)^n X^{n-1}$. Ce sont ainsi toutes les racines de ce polynôme ou encore

$$-n + \frac{n(n-1)}{2}X - \dots + (-1)^n X^{n-1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n-1} (X - z_k).$$

En particulier, en égalant les coefficients constants,

$$(-1)^n \times (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} z_k = -n,$$

et donc encore une fois $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{-2ik\pi/n}) = n$.

Finalement,

$$\forall n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

2) Soit n un entier naturel non nul.

$$b_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} (e^{i(a+\frac{k\pi}{n})} + e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \frac{1}{2^n} \prod_{k=1}^n e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} \prod_{k=1}^n (e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1).$$

Ensuite,

$$\prod_{k=1}^n e^{-i(a+\frac{k\pi}{n})} = e^{-ina} e^{-\frac{i\pi}{n}(1+2+\dots+n)} = e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2}.$$

D'autre part, soit $P = \prod_{k=1}^n (X + e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}) = \prod_{k=1}^n (X - (-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}))$. Pour tout k , on a $(-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})})^n = (-1)^n e^{2ina}$.

Par suite, les n nombres deux à deux distincts $-e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})}$, $1 \leq k \leq n$ sont racines du polynôme $X^n - (-1)^n e^{2ina}$, de degré n . On en déduit que, $P = X^n - (-1)^n e^{2ina}$.

Par suite, $\prod_{k=1}^n (e^{2i(a+\frac{k\pi}{n})} + 1) = P(1) = 1 - (-1)^n e^{2ina} = 1 - e^{2ina+n\pi}$, puis

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2^n} e^{-ina} e^{-i(n+1)\pi/2} (1 - e^{2ina+n\pi}) = \frac{1}{2^n} (e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} - e^{i(na+(n-1)\frac{\pi}{2})}) \\ &= \frac{1}{2^n} (e^{-i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})} + e^{i(na+(n+1)\frac{\pi}{2})}) = \frac{\cos(na + (n+1)\frac{\pi}{2})}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

3)

$$c_n \text{ est défini} \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\}, a + \frac{k\pi}{n} \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, a - \frac{k\pi}{n} + \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow a \notin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$$

Pour les a tels que c_n est défini, on a $c_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{i} \frac{e^{2i(a+k\pi/n)} - 1}{e^{2i(a+k\pi/n)} + 1}$.

Pour $1 \leq k \leq n$, posons $\omega_k = e^{2i(a+k\pi/n)}$ puis $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$. On a donc $c_n = \frac{1}{i^n} \prod_{k=1}^n z_k$.

Puisque $z_k = \frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}$, on a $\omega_k(1 - z_k) = 1 + z_k$ et donc, pour $1 \leq k \leq n$, $\omega_k^n(1 - z_k)^n = (1 + z_k)^n$ ou encore, les z_k sont racines du polynôme $P = (1 + X)^n - e^{2ina}(1 - X)^n$. Maintenant, les $a + \frac{k\pi}{n}$ sont dans $[a, a + \pi[$ et donc deux à deux distincts puisque la fonction tangente est injective sur tout intervalle de cette forme.

1er cas. Si $e^{2ina} \neq (-1)^n$ alors P est de degré n et $P = (1 - (-1)^n e^{2ina}) \prod_{k=1}^n (X - z_k)$. En évaluant en 0, on obtient

$$(1 - (-1)^n e^{2ina}) \prod_{k=1}^n (-z_k) = 1 - e^{2ina}.$$

D'où,

$$\prod_{k=1}^n z_k = \frac{1 - e^{2ina}}{(-1)^n - e^{2ina}} = \frac{1 - e^{2ina}}{e^{in\pi} - e^{2ina}} = \frac{e^{ina}}{e^{in\pi/2} e^{ina}} \frac{-2i \sin(na)}{-2i \sin n(a - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{i^n} \frac{\sin(na)}{\sin n(a - \frac{\pi}{2})}.$$

$$\text{Finalement, } c_n = (-1)^n \frac{\sin(na)}{\sin(n(a - \frac{\pi}{2}))}.$$

Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$. $c_n = c_{2p} = \frac{\sin(2pa)}{\sin(2pa - p\pi)} = (-1)^p$.

Si n est impair, posons $n = 2p + 1$. $c_n = c_{2p+1} = (-1)^p \tan((2p + 1)a)$.

2ème cas. Si $e^{2ina} = (-1)^n$, alors $2na \in n\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ou encore $a \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Dans ce cas, c_n n'est pas défini.

n° 2 : Tout d'abord

$$Q = (1 + X + \dots + X^n)' = \left(\frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}\right)' = \frac{(n+1)X^n(X-1) - X^{n+1}}{(X-1)^2} = \frac{nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1}{(X-1)^2}.$$

Ensuite, $\omega_0 = 1$ et donc, $Q(\omega_0) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Puis, pour $1 \leq k \leq n-1$, $\omega_k \neq 1$ et donc, puisque $\omega_k^n = 1$,

$$Q(\omega_k) = \frac{n\omega_k^{n+1} - (n+1)\omega_k^n + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n\omega_k - (n+1) + 1}{(\omega_k - 1)^2} = \frac{n}{\omega_k - 1}.$$

Par suite,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n(n+1)}{2} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{n}{\omega_k - 1} = \frac{n^n(n+1)}{2 \prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1)}.$$

Mais, $X^n - 1 = (X - 1)(1 + X + \dots + X^{n-1})$ et d'autre part $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = (X - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega_k)$. Par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, $\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{2ik\pi/n}) = 1 + X + \dots + X^{n-1}$ (Une autre rédaction possible est : $\forall z \in \mathbb{C}$, $(z - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = (z - 1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ et donc $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$ et finalement $\forall z \in \mathbb{C}$, $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega_k) = 1 + z + \dots + z^{n-1}$ car les deux polynômes ci-contre coïncident en une infinité de valeurs de z .)

En particulier, $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega_k) = 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1} = n$ ou encore $\prod_{k=1}^{n-1} (\omega_k - 1) = (-1)^{n-1} n$. Donc,

$$\prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega_k) = \frac{n^n(n+1)}{2} \frac{1}{(-1)^{n-1} n} = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1} (n+1)}{2}.$$

n° 3 : Il faut prendre garde au fait que les nombres $x_k = \cotan^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.

1er cas. Si n est pair, posons $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) + \sum_{k=p}^{2p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right) + \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}\right) \end{aligned}$$

Or, $\cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{(2p-1-k)\pi}{2p}\right) = \cotan^2\left(\pi - \frac{\pi}{4p} - \frac{k\pi}{2p}\right) = \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$ et donc $S_n = 2 \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$.

Mais cette fois ci,

$$0 \leq k \leq p-1 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p} \leq \frac{\pi}{4p} + \frac{(p-1)\pi}{2p} = \frac{(2p-1)\pi}{4p} < \frac{2p\pi}{4p} = \frac{\pi}{2}.$$

et comme, la fonction $x \mapsto \cotan^2 x$ est strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, les x_k , $0 \leq k \leq p-1$, sont deux à deux distincts.

Pour $0 \leq k \leq p-1$, posons $y_k = \cotan\left(\frac{\pi}{4p} + \frac{k\pi}{2p}\right)$.

$$\begin{aligned} y_k &= i \frac{e^{(2k+1)i\pi/4p} + 1}{e^{(2k+1)i\pi/4p} - 1} \Rightarrow e^{(2k+1)i\pi/4p} (y_k - i) = y_k + i \\ &\Rightarrow (y_k + i)^{2p} = e^{(2k+1)i\pi} (y_k - i)^{2p} = (-1)^{2k+1} (y_k - i)^{2p} = -(y_k - i)^{2p} \\ &\Rightarrow (y_k + i)^{2p} + (y_k - i)^{2p} = 0 \Rightarrow 2(y_k^{2p} - C_{2p}^2 y_k^{2p-2} + \dots + (-1)^p) = 0 \\ &\Rightarrow x_k^p - C_{2p}^2 x_k^{p-1} + \dots + (-1)^p = 0. \end{aligned}$$

Les p nombres deux à deux distincts x_k sont racines de l'équation de degré p : $z^p - C_{2p}^2 z^{p-1} + \dots + (-1)^p = 0$ qui est de degré p . On en déduit que

$$S_n = 2 \sum_{k=0}^{p-1} x_k = 2C_{2p}^2 = n(n-1).$$

2ème cas. Si n est impair, posons $n = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) + \cotan^2 \frac{\pi}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{p-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2(2p+1)} + \frac{k\pi}{2p+1}\right) \end{aligned}$$

La même démarche amène alors à $S_n = 2C_{2p+1}^2 = n(n-1)$.

Dans tous les cas,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cotan^2\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = n(n-1).$$

n° 4 :

1) Pour tout réel α ,

$$e^{i(2p+1)\alpha} = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{2p+1} = \sum_{j=0}^{2p+1} C_{2p+1}^j \cos^{2p+1-j} \alpha (i \sin \alpha)^j$$

puis

$$\sin((2p+1)\alpha) = \text{Im}(e^{i(2p+1)\alpha}) = \sum_{j=0}^p C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \alpha (-1)^j \sin^{2j+1} \alpha.$$

Pour $1 \leq k \leq p$, en posant $\alpha = \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=0}^p C_{2p+1}^{2j+1} \cos^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} (-1)^j \sin^{2j+1} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Ensuite, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1} \neq 0$. En divisant les deux membres de (*) par $\sin^{2p+1} \frac{k\pi}{2p+1}$, on obtient :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} \cotan^{2(p-j)} \frac{k\pi}{2p+1} = 0.$$

Maintenant, les p nombres $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}$ sont deux à deux distincts. En effet, pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$. Or, sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, la fonction $x \mapsto \cotan x$ est strictement décroissante et strictement positive, de sorte que la fonction $x \mapsto \cotan^2 x$ est strictement décroissante et en particulier injective.

Ces p nombres deux à deux distincts sont racines du polynôme $P = \sum_{j=0}^p (-1)^j C_{2p+1}^{2j+1} X^{p-j}$, qui est de degré p . Ce sont donc toutes les racines de P (ces racines sont par suite simples et réelles). D'après les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on a :

$$\sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} = -\frac{-C_{2p+1}^3}{C_{2p+1}^1} = \frac{p(2p-1)}{3}.$$

puis,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \sum_{k=1}^p \left(1 + \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1}\right) = p + \frac{p(2p-1)}{3} = \frac{2p(p+1)}{3}.$$

2) Pour n entier naturel non nul donné, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

et la suite (u_n) est strictement croissante. De plus, pour $n \geq 2$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

La suite (u_n) est croissante et est majorée par 2. Par suite, la suite (u_n) converge vers un réel inférieur ou égal à 2.

3) Pour x élément de $[0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(x) = x - \sin x$ et $g(x) = \tan x - x$. f et g sont dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et pour x élément de $]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = 1 - \cos x$ et $g'(x) = \tan^2 x$. f' et g' sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et donc strictement croissantes sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on en déduit que f et g sont strictement positives sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc, $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin x < x < \tan x$ et par passage à l'inverse $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

4) Pour $1 \leq k \leq p$, $0 < \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{\pi}{2}$ et donc $0 < \cotan \frac{k\pi}{2p+1} < \frac{2p+1}{k\pi} < \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2p+1}}$. Puis, $\cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} <$

$\left(\frac{(2p+1)^2}{\pi^2}\right) \frac{1}{k^2} < \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{2p+1}}$. En sommant ces inégalités, on obtient

$$\frac{\pi^2 p(2p-1)}{3(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^p \cotan^2 \frac{k\pi}{2p+1} < u_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{(2p+1)^2} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\sin^2 \frac{k\pi}{2p+1}} = \frac{2p(p+1)\pi^2}{3(2p+1)^2}.$$

Les membres de gauche et de droite tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$ quand p tend vers l'infini et donc la suite (u_p) tend vers $\frac{\pi^2}{6}$.

n° 5 : $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7 = (X^6 + 8X^3 + 7) - (7X^4 + 7X) = (X^3 + 1)(X^3 + 7) - 7X(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(X^3 - 7X + 7)$ et $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7 = 3X^2(X^3 + 1) - 7(X^3 + 1) = (X^3 + 1)(3X^2 - 7)$. Donc,

$$(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = (X^3 + 1)((X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^2 - 7)).$$

Maintenant, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}})^3 - 7(\varepsilon\sqrt{\frac{7}{3}}) + 7 = -(\varepsilon\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}) + 7 \neq 0$.

Les polynômes $(X^3 - 7X + 7)$ et $(3X^2 - 7)$ n'ont pas de racines communes dans \mathbb{C} et sont donc premiers entre eux. Donc, $(X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7) \wedge (3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7) = X^3 + 1$.

n° 6 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$(X+1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1 \Leftrightarrow j$ et j^2 sont racines de $(X+1)^n - X^n - 1$

$\Leftrightarrow j$ est racine de $(X+1)^n - X^n - 1$

(car $(X+1)^n - X^{n-1}$ est dans $\mathbb{R}[X]$)

$\Leftrightarrow (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \Leftrightarrow (-j^2)^n - j^n - 1 = 0$.

Si $n \in 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.

Si $n \in 1 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$.

Si $n \in 2 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$.

Si $n \in 3 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -3 \neq 0$.
 Si $n \in 4 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$.
 Si $n \in 5 + 6\mathbb{Z}$, $(-j^2)^n - j^n - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$.

En résumé, $(X + 1)^n - X^n - 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$ si et seulement si n est dans $(1 + 6\mathbb{Z}) \cup (5 + 6\mathbb{Z})$.

n° 7 : Soit P un polynôme non nul à coefficients réels.

Pour tout réel x , on peut écrire

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j},$$

où λ est un réel non nul, k et l sont des entiers naturels, les α_i sont des réels deux à deux distincts, les α_i et les β_j des entiers naturels et les $(x - z_j)(x - \bar{z}_j)$ des polynômes deux à deux premiers entre eux à racines non réelles.

Tout d'abord, pour tout réel x , $\prod_{j=1}^l ((x - z_j)(x - \bar{z}_j))^{\beta_j} > 0$ (tous les trinômes du second degré considérés étant unitaires sans racines réelles.)

Donc, $(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i} \geq 0)$.

Ensuite, si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) \geq 0$ ce qui impose $\lambda > 0$. Puis, si un exposant α_i est impair, P change de signe en α_i , ce qui contredit l'hypothèse faite sur P . Donc, $\lambda > 0$ et tous les α_i sont pairs. Réciproquement, si $\lambda > 0$ et si tous les α_i sont pairs, alors bien sûr, $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Posons $A = \sqrt{\lambda} \prod_{i=1}^k (x - \alpha_i)^{\alpha_i/2}$. A est un élément de $\mathbb{R}[X]$ car $\lambda > 0$ et car les α_i sont des entiers pairs. Posons ensuite

$Q_1 = \prod_{j=1}^l (x - z_j)^{\beta_j}$ et $Q_2 = \prod_{j=1}^l (x - \bar{z}_j)^{\beta_j}$. Q_1 admet après développement une écriture de la forme $Q_1 = B + iC$ où B et C sont des polynômes à coefficients réels. Mais alors, $Q_2 = B - iC$. Ainsi,

$$P = A^2 Q_1 Q_2 = A^2 (B + iC)(B - iC) = A^2 (B^2 + C^2) = (AB)^2 + (AC)^2 = R^2 + S^2,$$

où R et S sont des polynômes à coefficients réels.

n° 8 : Si P est de degré inférieur ou égal à 0, c'est clair.

Sinon, posons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(P(X)) - X &= P(P(X)) - P(X) + P(X) - X = \sum_{k=0}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k ((P(X))^k - X^k) + (P(X) - X). \end{aligned}$$

Mais, pour $1 \leq k \leq n$, $(P(X))^k - X^k = (P(X) - X)((P(X))^{k-1} + X(P(X))^{k-2} + \dots + X^{k-1})$ est divisible par $P(X) - X$ et il en est donc de même de $P(P(X)) - X$.

n° 9 :

1) Posons $P = \sum_{i=0}^l a_i X^i$ où $l \geq 1$ et où les a_i sont des entiers relatifs avec $a_l \neq 0$.

$$P(n + km) = \sum_{i=0}^l a_i (n + km)^i = \sum_{i=0}^l a_i (n^i + K_i m) = \sum_{i=0}^l a_i n^i + Km = m + Km = m(K + 1),$$

où K est un entier relatif. $P(n + km)$ est donc un entier relatif multiple de $m = P(n)$.

2) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier.

Soit n un entier naturel donné et $m = P(n)$ (donc, $m \geq 2$ et en particulier $m \neq 0$). Pour tout entier relatif k , $P(n+km)$ est divisible par m mais $P(n+km)$ est un nombre premier ce qui impose $P(n+km) = m$. Par suite, le polynôme $Q = P - m$ admet une infinité de racines deux à deux distinctes (puisque $m \neq 0$) et est donc le polynôme nul ou encore P est constant.

n° 10 :

1) Déjà, P_0 est dans E .

Soit n un naturel non nul. $P_n = \frac{1}{n!}(X+1)\dots(X+n)$ et donc, si k est élément de $\{-1, \dots, -n\}$, $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Si k est un entier positif, $P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = C_{n+k}^n \in \mathbb{Z}$.

Enfin, si k est un entier strictement plus petit que $-n$,

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}(k+1)\dots(k+n) = (-1)^n \frac{1}{n!}(-k-1)\dots(-k-n) = (-1)^n C_{-k-1}^n \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$, ou encore $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2) Evident

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$ (si P est nul, P est combinaison linéaire à coefficients entiers des P_k).

Puisque $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) = k$, on sait que pour tout entier naturel n , $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et donc, $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$ (tout polynôme non nul ayant un degré n , s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire des P_k).

Soit $n = \deg P$.

Il existe $n+1$ nombres complexes a_0, \dots, a_n tels que $P = a_0 P_0 + \dots + a_n P_n$. Il reste à montrer que les a_i sont des entiers relatifs.

L'égalité $P(-1)$ est dans \mathbb{Z} , fournit : a_0 est dans \mathbb{Z} .

L'égalité $P(-2)$ est dans \mathbb{Z} , fournit : $a_0 - a_1$ est dans \mathbb{Z} et donc a_1 est dans \mathbb{Z} .

L'égalité $P(-3)$ est dans \mathbb{Z} , fournit : $a_0 - 2a_1 + a_2$ est dans \mathbb{Z} et donc a_2 est dans \mathbb{Z} ...

L'égalité $P(-(k+1))$ est dans \mathbb{Z} , fournit : $a_0 - a_1 + \dots + (-1)^k a_k$ est dans \mathbb{Z} et si par hypothèse de récurrence, a_0, \dots, a_{k-1} sont des entiers relatifs alors a_k l'est encore.

Tous les coefficients a_k sont des entiers relatifs et E est donc constitué des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des P_k .

n° 11 : On prend $n \geq 2$ (sinon tout est clair).

$Q = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ est à racines simples si et seulement si $e^{ia} \neq e^{-ia}$ ou encore $e^{2ia} \neq 1$ ou enfin, $a \notin \pi\mathbb{Z}$.

1er cas. Si $a \in \pi\mathbb{Z}$ alors, $P = 0 = 0 \cdot Q$.

2ème cas. Si $a \notin \pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} P(e^{ia}) &= \sin a (\cos(na) + i \sin(na)) - \sin(na) (\cos a + i \sin a) + \sin((n-1)a) \\ &= \sin((n-1)a) - (\sin(na) \cos a - \cos(na) \sin a) = 0. \end{aligned}$$

Donc, e^{ia} est racine de P et de même, puisque P est dans $\mathbb{R}[X]$, e^{-ia} est racine de P . P est donc divisible par Q .

$$\begin{aligned} P &= P - P(e^{ia}) = \sin a (X^n - e^{ina}) - \sin(na)(X - e^{ia}) = (X - e^{ia}) \left(\sin a \sum_{k=0}^{n-1} X^{n-1-k} e^{ika} - \sin(na) \right) \\ &= (X - e^{ia})S. \end{aligned}$$

Puis,

$$\begin{aligned}
S &= S - S(e^{-i\alpha}) = \sin \alpha \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\alpha} (\chi^{n-1-k} - e^{-i(n-1-k)\alpha}) = \sin \alpha (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{k=0}^{n-2} e^{ik\alpha} \left(\sum_{j=0}^{n-2-k} \chi^{n-2-k-j} e^{-ija} \right) \\
&= \sin \alpha (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{k=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^{n-2-k} \chi^{n-2-k-j} e^{i(k-j)\alpha} \right) = \sin \alpha (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \left(\sum_{k+j=l} e^{i(k-j)\alpha} \right) \chi^{n-2-l} \\
&= \sin \alpha (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \left(\sum_{k=0}^l e^{i(2k-l)\alpha} \right) \chi^{n-2-l}
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\sum_{k=0}^l e^{i(2k-l)\alpha} = e^{-il\alpha} \frac{1 - e^{2i(l+1)\alpha}}{1 - e^{2i\alpha}} = \frac{\sin((l+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

Donc

$$S = \sin \alpha (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \frac{\sin((l+1)\alpha)}{\sin \alpha} \chi^{n-2-l} = (\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{l=0}^{n-2} \sin((l+1)\alpha) \chi^{n-2-l},$$

et finalement

$$P = (\chi - e^{i\alpha})(\chi - e^{-i\alpha}) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)\alpha) \chi^{n-2-k} = (\chi^2 - 2\chi \cos \alpha + 1) \sum_{k=0}^{n-2} \sin((k+1)\alpha).$$

n° 12 : Soit P un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.

Posons $P = \lambda(\chi - z_1)(\chi - z_2)\dots(\chi - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j \neq i} (\chi - z_j) \right) = \sum_{i=1}^n \frac{P}{\chi - z_i},$$

et donc

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\chi - z_i}.$$

Soit alors z une racine de P' dans \mathbb{C} . Si z est racine de P (et donc racine de P d'ordre au moins 2) le résultat est clair. Sinon,

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\overline{z - z_i}}{|z - z_i|^2}.$$

En posant $\lambda_i = \frac{1}{|z - z_i|^2}$, (λ_i est un réel strictement positif) et en conjuguant, on obtient $\sum_{i=1}^n \lambda_i (z - z_i) = 0$ et donc

$$z = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \text{bar}(z_1(\lambda_1), \dots, z_n(\lambda_n)).$$

n° 13 : On suppose que $n = \deg P \geq 1$.

On pose $P = \lambda(X - z_1)(X - z_2)\dots(X - z_n)$ où λ est un complexe non nul et les z_k sont des complexes pas nécessairement deux à deux distincts.

$$\text{D'après l'exercice précédent, } \frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - z_k}.$$

Si P est divisible par P' , $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / P = (aX + b)P'$ et donc $\exists(a, b) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \frac{P'}{P} = \frac{1}{aX + b}$ ce qui montre que la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ a exactement un et un seul pôle complexe et donc que les z_k sont confondus.

En résumé, si P' divise P , $\exists(a, \lambda) \in \mathbb{C}^2 / P = \lambda(X - a)^n$ et $\lambda \neq 0$.

Réciproquement, si $P = \lambda(X - a)^n$ avec $\lambda \neq 0$, alors $P' = n\lambda(X - a)^{n-1}$ divise P .

Les polynômes divisibles par leur dérivée sont les polynômes de la forme $\lambda(X - a)^n$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$.

n° 14 : Soit P un tel polynôme. -2 est racine de $P + 10$ d'ordre au moins trois et donc racine de $(P + 10)' = P'$ d'ordre au moins deux.

De même, 2 est racine de P' d'ordre au moins deux et puisque P' est de degré 4, il existe un complexe λ tel que $P' = \lambda(X - 2)^2(X + 2)^2 = \lambda(X^2 - 4)^2 = \lambda(X^4 - 8X^2 + 16)$ et enfin, nécessairement,

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 / P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Réciproquement, soit $P = \lambda\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) + \mu$ avec $\lambda \neq 0$.

P solution $\Leftrightarrow P + 10$ divisible par $(X + 2)^3$ et $P - 10$ est divisible par $(X - 2)^3$

$$\Leftrightarrow P(-2) + 10 = 0 = P'(-2) = P''(-2) \text{ et } P(2) + 10 = 0 = P'(2) = P''(2) \Leftrightarrow P(-2) = -10 \text{ et } P(2) = 10$$

$$\begin{cases} \lambda\left(-\frac{32}{5} + \frac{64}{3} - 32\right) + \mu = -10 \\ \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + \mu = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32\right) + \mu = 10$$

$$\Leftrightarrow \mu = 0 \text{ et } \lambda = \frac{75}{128}$$

On trouve un et un seul polynôme solution à savoir $P = \frac{75}{128}\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{8}{3}X^3 + 16X\right) = \frac{15}{128}X^5 - \frac{25}{16}X^3 + \frac{75}{8}X$.

n° 15 : Les polynômes de degré inférieur ou égal à 0 solutions sont clairement 0 et 1.

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

Soit a une racine de P dans \mathbb{C} . Alors, a^2, a^4, a^8, \dots , sont encore racines de P . Mais, P étant non nul, P ne doit admettre qu'un nombre fini de racines. La suite $(a^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ne doit donc prendre qu'un nombre fini de valeurs ce qui impose $a = 0$ ou $|a| = 1$ car si $|a| \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite $(|a^{2^n}|)$ est strictement monotone et en particulier les a^{2^n} sont deux à deux distincts.

De même, si a est racine de P alors $(a - 1)^2$ l'est encore mais aussi $(a - 1)^4, (a - 1)^8, \dots$, ce qui impose $a = 1$ ou $|a - 1| = 1$.

En résumé,

$$(a \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{C}) \Rightarrow ((a = 0 \text{ ou } |a| = 1) \text{ et } (a = 1 \text{ ou } |a - 1| = 1)) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } a = 1 \text{ ou } |a| = |a - 1| = 1).$$

Maintenant, $|a| = |a - 1| = 1 \Leftrightarrow |a| = 1 \text{ et } |a| = |a - 1| \Leftrightarrow a \in \mathcal{C}((0, 0), 1) \cap \text{med}[(0, 0), (1, 0)] = \{-j, -j^2\}$.

Donc, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est solution, il existe K, α, β, γ , K complexe non nul et α, β et γ entiers naturels tels que $P = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X + j)^\gamma(X + j^2)^\gamma$ ($-j$ et $-j^2$ devant avoir même ordre de multiplicité).

Réciproquement, si $P = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X + j)^\gamma(X + j^2)^\gamma = KX^\alpha(X - 1)^\beta(X^2 - X + 1)^\gamma$.

$$P(X^2) = KX^{2\alpha}(X^2 - 1)^\beta(X^4 - X^2 + 1)^\gamma = KX^{2\alpha}(X - 1)^\beta(X + 1)^\beta(X^2 - \sqrt{3}X + 1)^\gamma(X^2 + \sqrt{3}X + 1)^\gamma,$$

et

$$\begin{aligned} P(X)P(X+1) &= KX^\alpha(X-1)^\beta(X^2-X+1)^\gamma K(X+1)^\alpha X^\beta(X^2+X+1)^\gamma \\ &= K^2 X^{\alpha+\beta}(X-1)^\beta(X+1)^\alpha(X^2-X+1)^\gamma(X^2+X+1)^\gamma. \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles d'un polynôme non nul, P est solution si et seulement si $P = 0$ ou $K = 1$ et $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$.

Les polynômes solutions sont 0 et les $(X^2 - X)^\alpha$ où α est un entier naturel quelconque.

n° 16 : a est solution du problème si et seulement si $X^5 - 209X + a$ est divisible par un polynôme de la forme $X^2 + \alpha X + 1$.
Mais

$$X^5 - 209X + a = (X^2 + \alpha X + 1)(X^3 - \alpha X^2 + (\alpha^2 - 1)X - (\alpha^3 - 2\alpha)) + (\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208)X + a + (\alpha^3 - 2\alpha).$$

Donc a est solution $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} / \begin{cases} \alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \\ a = -\alpha^3 + 2\alpha \end{cases}$. Mais, $\alpha^4 - 3\alpha^2 - 208 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \in \{-13, 16\} \Leftrightarrow \alpha \in \{-4, 4, i\sqrt{13}, -i\sqrt{13}\}$ et la deuxième équation fournit $a \in \{56, -56, 15i\sqrt{13}, -15i\sqrt{13}\}$.

n° 17 : On note que $P(1) = 1 \neq 0$ et donc que l'expression proposée a bien un sens.

$$\sum_{k=1}^5 \frac{a_k + 2}{a_k - 1} = \sum_{k=1}^5 \left(1 + \frac{3}{a_k - 1}\right) = 5 - 3 \sum_{k=1}^5 \frac{1}{1 - a_k} = 5 - 3 \frac{P'(1)}{P(1)} = 5 - 3 \frac{12}{1} = -31.$$

n° 18 :

1)

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{xy + xz + yz}{xyz} = 1 \Leftrightarrow \sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = -4 \\ xyz = -4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x, y$ et z sont les trois solutions de l'équation $X^3 - X^2 - 4X + 4 = 0$

$\Leftrightarrow x, y$ et z sont les trois solutions de l'équation $(X-1)(X-2)(X+2) = 0$

$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(1, 2, -2), (1, -2, 2), (2, 1, -2), (2, -2, 1), (-2, 1, 2), (-2, 2, 1)\}$

2) Pour $1 \leq k \leq 4$, posons $S_k = x^k + y^k + z^k + t^k$. On a $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Calculons S_3 en fonction des σ_k . On a $\sigma_1^3 = S_3 + 3 \sum x^2 y + 6 \sum xyz = S_3 + 3 \sum x^2 y + 6\sigma_3$ (*). Mais on a aussi $S_1 S_2 = S_3 + \sum x^2 y$. Donc, $\sum x^2 y = \sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - S_3$. En reportant dans (*), on obtient $\sigma_1^3 = S_3 + 3(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - S_3) + 6\sigma_3$ et donc,

$$S_3 = \frac{1}{2}(-\sigma_1^3 + 3(\sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - S_3) + 6\sigma_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Calculons S_3 en fonction des σ_k . Soit $P = (X-x)(X-y)(X-z)(X-t) = X^4 - \sigma_1 X^3 + \sigma_2 X^2 - \sigma_3 X + \sigma_4$.

$$P(x) + P(y) + P(z) + P(t) = 0 \Leftrightarrow S_4 - \sigma_1 S_3 + \sigma_2 S_2 - \sigma_3 S_1 + 4\sigma_4 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + \sigma_3\sigma_1 - 4\sigma_4$$

$$\Leftrightarrow S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4.$$

Par suite,

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ -2\sigma_2 = 10 \\ 3\sigma_3 = 0 \\ 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_2 = -5 \\ \sigma_3 = 0 \\ \sigma_4 = 6 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x, y, z$, et t sont les 4 solutions de l'équation $X^4 - 5X^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x, y, z, t)$ est l'une des 24 permutations du quadruplet $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$

n° 19 : Le polynôme nul est solution. Soit P un polynôme non nul de degré n solution alors $n = n - 1 + n - 2$ et donc $n = 3$. Posons donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$.

$$\begin{aligned} P(2X) = P'(X)P''(X) &\Leftrightarrow 8aX^3 + 4bX^2 + 2cX + d = (3aX^2 + 2bX + c)(6aX + 2b) \\ &\Leftrightarrow (18a^2 - 8a)X^3 + (18ab - 4b)X^2 + (4b^2 + 6ac - 2c)X + 2bc - d = 0 \\ &\Leftrightarrow 18a^2 - 8a = 18ab - 4b = 4b^2 + 6ac - 2c = 2bc - d = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{4}{9} \text{ et } b = c = d = 0. \end{aligned}$$

Les polynômes solutions sont 0 et $\frac{4}{9}X^3$.

n° 20 : 0 n'est pas racine de P .

On rappelle que si $r = \frac{p}{q}$, ($p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$, $p \wedge q = 1$) est racine de P , alors p divise le coefficient constant de P et q divise son coefficient dominant. Ici, p divise 4 et q divise 12 et donc, p est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ et q est élément de $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ou encore r est élément de $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{12}\}$.

Réciproquement, on trouve $P(\frac{2}{3}) = P(\frac{1}{4}) = 0$. P est donc divisible par

$$12(X - \frac{2}{3})(X - \frac{1}{4}) = (3X - 2)(4X - 1) = 12X^2 - 11X + 2.$$

Plus précisément, $P = (12X^2 - 11X + 2)(X^2 + X + 2) = (3X - 2)(4X - 1)(X - \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2})(X - \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2})$.

n° 21 : Pour $n \geq 0$, posons $P_n = (X - 1)^{2n} - X^{2n} + 2X - 1$. $P_n(0) = P_n(1) = P_n(\frac{1}{2}) = 0$. P_n admet $0, 1$ et $\frac{1}{2}$ pour racines et est donc divisible par $X(X - 1)(2X - 1) = 2X^3 - 3X^2 + X$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le quotient est nul. Si $n = 2$, le quotient vaut -2 .

Soit $n \geq 3$. On met successivement $2X - 1$ puis $X - 1$ puis X en facteur :

$$\begin{aligned} P_n &= ((X - 1)^2)^n - (X^2)^n + (2X - 1) = ((X - 1)2 - X2) \sum_{k=0}^{n-1} (X - 1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + (2X - 1) \\ &= (2X - 1) \left(- \sum_{k=0}^{n-1} (X - 1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 \right) = (2X - 1) \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (X - 1)^{2k} X^{2(n-1-k)} + 1 - X^{2n-2} \right) \\ &= (2X - 1) \left(-(X - 1) \sum_{k=1}^{n-1} (X - 1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - (X - 1) \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\ &= (2X - 1)(X - 1) \left(- \sum_{k=1}^{n-1} (X - 1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=0}^{2n-1} X^k \right) \\ &= (2X - 1)(X - 1) \left(- \sum_{k=1}^{n-2} (X - 1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-1} X^k - 1 - (X - 1)^{2n-3} \right) \\ &= (2X - 1)(X - 1) \left(- \sum_{k=1}^{n-2} (X - 1)^{2k-1} X^{2(n-1-k)} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^k - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} C_{2n-3}^k X^k \right) \\ &= X(2X - 1)(X - 1) \left(- \sum_{k=1}^{n-2} (X - 1)^{2k-1} X^{2n-2k-3} - \sum_{k=1}^{2n-3} X^{k-1} - \sum_{k=1}^{2n-3} (-1)^{2n-3-k} C_{2n-3}^k X^{k-1} \right) \end{aligned}$$

n° 22 :

$$\begin{aligned}
1 &= (X + (1 - X))^{n+m-1} = \sum_{k=0}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1 - X)^{n+m-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1 - X)^{n+m-1-k} + \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^k (1 - X)^{n+m-1-k} \\
&= (1 - X)^m \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1 - X)^{n-1-k} + X^n \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n} (1 - X)^{n+m-1-k}
\end{aligned}$$

Soient $U = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k X^{k-n} (1 - X)^{n+m-1-k}$ et $V = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+m-1}^k X^k (1 - X)^{n-1-k}$. U et V sont des polynômes tels que $UX^n + V(1 - X)^m = 1$. De plus, pour $n \leq k \leq n+m-1$, $\deg(X^{k-n}(1 - X)^{n+m-1-k}) = k - n + n + m - 1 - k = m - 1 < m$ et donc $\deg(U) < m$ et de même pour $0 \leq k \leq n-1$, $\deg(X^k(1 - X)^{n-1-k}) = k + n - 1 - k = n - 1 < n$ et $\deg(V) < n$.