Planche n° 18. Fractions rationnelles (et polynômes)

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (IT) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\dfrac{X^2+3X+5}{X^2-3X+2}$ 2) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ 3) $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$

4) $\dfrac{X^2+1}{(X-1)^2(X+1)^2}$ 5) $\dfrac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$ 6) $\dfrac{X^6}{(X^3-1)^2}$

7) $\dfrac{1}{X^6+1}$ 8) $\dfrac{X^2+3}{X^5-3X^4+5X^3-7X^2+6X-2}$ 9) $\dfrac{X}{(X^2+1)^3(X^2-1)}$

10) $\dfrac{X^6+1}{X^5-X^4+X^3-X^2+X-1}$ 11) $\dfrac{X^7+1}{(X^2+X+1)^3}$ 12) $\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^4(X^2-2)^2}$

13) $\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

n° 2 : (IT) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\dfrac{1}{X^n-1}$ 2) $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ 3) $\dfrac{n!}{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}$

4) $\dfrac{X^2}{X^4-2X^2\cos(2a)+1}$ 5) $\dfrac{1}{X^{2n}+1}$.

n° 3 : (***) Soit U_n l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur) $F=\displaystyle\sum_{\omega\in U_n}\frac{\omega X+1}{\omega^2X^2+\omega X+1}$.

n° 4 : (I)** Soit $F=\dfrac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Etablir un résultat analogue pour F impaire.

n° 5 : (*) Montrer que $\left(\dfrac{1}{X-a}\right)_{a\in\mathbb{C}}$ est libre dans $K(X)$.

n° 6 : (I)** Calculer la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{X^2+1}$.

n° 7 : (I)** On pose $P=a(X-x_1)\dots(X-x_n)$ où les x_i sont des complexes non nécessairement deux à deux distincts et a est un complexe non nul.
Calculer $\dfrac{P'}{P}$. De manière générale, déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ quand P est un polynôme scindé. Une application : déterminer tous les polynômes divisibles par leur dérivées.

n° 8 : (*I)** Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^6-2X^3\cos a+1$ où a est un réel donné dans $[0,\pi]$.

n° 9 : (I)** Soit $P=$ où n est un entier naturel non nul, les a_i sont des entiers relatifs et a_0 et a_n sont non nuls. Soient p un entier relatif non nul et q un entier naturel non nul tels que $p\wedge q=1$.
Montrer que, si $r=\dfrac{p}{q}$ est une racine (rationnelle) de P alors p divise a_0 et q divise a_n.
Application. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $9z^4-3z^3+16z^2-6z-4=0$.

n° 10 : (I)** (Equations réciproques) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$ en posant $Z = z + \dfrac{1}{z}$ (ou autrement).

2) $z^6 - 5z^5 + 5z^4 - 5z^2 + 5z - 1 = 0$.

3) $z^7 - z^6 - 7z^5 + 7z^4 + 7z^3 - 7z^2 - z + 1 = 0$.

n° 11 : (***) Former une équation du sixième degré dont les racines sont les $\sin \dfrac{k\pi}{7}$ où $k \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ puis montrer que ces six nombres sont irrationnels.

n° 12 : (****) Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré 4.
Montrer que les images dans le plan complexe des racines de P forment un parallélogramme si et seulement si P' et $P^{(3)}$ ont une racine commune

n° 13 : (***) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système $\left\{\begin{array}{l} y^2 + yz + z^2 = 7 \\ z^2 + zx + x^2 = 13 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{array}\right.$.

n° 14 : (***) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$.

1) Calculer $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{2}{2 - \omega_k}\right)$.

2) Montrer que, pour tout réel a, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(\omega_k^2 - 2\omega_k \cos a + 1) = 2(1 - \cos(na))$ (questions indépendantes.)

n° 15 : (***) Déterminer λ et μ complexes tels que les zéros de $z^4 - 4z^3 - 36z^2 + \lambda z + \mu$ soient en progression arithmétique. Résoudre alors l'équation.

n° 16 : (***) Soient x_1, x_2, x_3 les zéros de $X^3 + 2X - 1$. Calculer $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

n° 17 : (***) Soient x_1,..., x_8 les zéros de $X^8 + X^7 - X + 3$. Calculer $\displaystyle\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$ (168 termes).

n° 18 : (***) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 21z + 8 = 0$ sachant qu'il existe deux des solutions sont inverses l'une de l'autre.