Planche n° 20. Déterminants

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (**) Montrer que $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$.

n° 2 : (**) Pour a, b et c deux à deux distincts donnés, factoriser $\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}$.

n° 3 : (***) Calculer :

1) $\det(|i-j|)_{1\leq i,j\leq n}$ **2)** $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leq i,j\leq n}$ ($a_1,...,a_n$ étant n réels donnés) **3)** $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & & \dots & a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **5)** $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1\leq i,j\leq p+1}$ **6)** $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & & \dots & a_{n-2} & a_{n-1}-X \end{vmatrix}$

n° 4 : (*I)** (Déterminant de VANDERMONDE) Soit $A = \left(x_j^i\right)_{0\leq i,j\leq n}$ où x_0,..., x_n sont $n+1$ complexes. Calculer $\det A = \mathrm{Van}(x_0,\dots,x_n)$.

n° 5 : (****) (Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT) Soit $A = \left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ où a_1,..., a_n, b_1,...,b_n sont $2n$ réels tels que toutes les sommes a_i+b_j soient non nulles. Calculer $\det A$ (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas $a_i = b_i = i$.

n° 6 : (****) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où, pour tout i et tout j, $a_{i,j} \in \{-1,1\}$. Montrer que $\det A$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

n° 7 : (***) Résoudre le système $MX = U$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

n° 8 : (*I)** Soit $(A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ et $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det C \geq 0$.

n° 9 : (I)** Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$. Montrer que $\det B = \det A$.

n° 10 : (*I)** Déterminer les matrices A, carrées d'ordre n, telles que pour toute matrice carrée B d'ordre n on a $\det(A+B) = \det A + \det B$.

n° 11 : (****) (Déterminant circulant) Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & & a_n & a_1 \end{pmatrix}$ et $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1\leq k,l\leq n}$ où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer P^2 et PA. En déduire $\det A$.

n° 12 : (*I)** Calculer $\det(\mathrm{com}A)$ en fonction de $\det A$ puis étudier le rang de $\mathrm{com}A$ en fonction du rang de A.

n° 13 : (*I)** (Dérivée d'un déterminant) Soient $a_{i,j}$ ((i,j) élément de $\{1,...,n\}^2$) n^2 fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $\mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \det(A(x))$.

Applications. Calculer **1)** $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$ **2)** $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & & x \\ x & x+a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

n° 14 : (*I)** Calculer

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2)** $\det((i+j-1)^2)$ **3)** $\begin{vmatrix} a & b & \dots & & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$ b, c complexes distincts **5)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

