

Planche n° 21. Systèmes linéaires

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (*)T** Résoudre (en discutant en fonction des différents paramètres) les systèmes suivants :

$$\begin{array}{l}
 1) \left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{array} \right. \\
 4) \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z + mt = m - 1 \\ 2x + y + mz + 3t = 1 \\ 3x + my + z + 2t = 0 \\ mx + 3y + 2z + t = 0 \end{array} \right. \\
 7) \left\{ \begin{array}{l} (b+c)^2x + b^2y + c^2z = 1 \\ a^2x + (c+a)^2y + c^2z = 1 \\ a^2x + b^2y + (a+b)^2z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right. \\
 9) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = 2 \\ a^2x + b^2y + c^2z = 3 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 2) \left\{ \begin{array}{l} 2x + my + z = 3m \\ x - (2m+1)y + 2z = 4 \\ 5x - y + 4z = 3m - 2 \\ mx + y + z = m + 2 \\ -x - y + mz = m - 2 \\ -mx + y + mz = -m \\ x - y - mz = m - 4 \end{array} \right. \\
 5) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = p \\ cx + ay + bz = q \\ bx + cy + az = r \end{array} \right. \\
 8) \left\{ \begin{array}{l} ax + by + cz = p \\ cx + ay + bz = q \\ bx + cy + az = r \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 3) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1 \end{array} \right. \\
 6) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = m \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{1}{m} \end{array} \right.
 \end{array}$$

(où $a, b,$ et c sont les racines de l'équation $t^3 - t + 1 = 0$).

n° 2 : (*)T** Donner une base du sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{array} \right. .$$

n° 3 : (*)I** Dans le plan, on donne n points A_1, \dots, A_n . Existe-t-il n points M_1, \dots, M_n tels que A_1 soit le milieu de $[M_1, M_2]$, A_2 soit le milieu de $[M_2, M_3], \dots, A_{n-1}$ soit le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et A_n soit le milieu de $[M_n, M_1]$.

n° 4 : (*)** Résoudre le système : $x_1 + x_2 = 0, x_{k-1} + x_k + x_{k+1} = 0$ pour $k = 2, \dots, n-1, x_{n-1} + x_n = 0$.

n° 5 : (*)I** Soit E un ensemble contenant au moins n éléments et (f_1, f_2, \dots, f_n) un n -uplet de fonctions de E dans \mathbb{C} . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) la famille (f_1, \dots, f_n) est libre ;
- 2) il existe n éléments a_1, a_2, \dots, a_n dans E tels que $\det(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$.

n° 6 : ()** Déterminer l'inverse de $A = (a_{i,j})$ telle que $a_{i,i+1} = a_{i,i-1} = 1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

n° 7 : (*)** Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ $2n$ nombres complexes deux à deux distincts tels que les sommes $a_i + b_j$ soient toutes non nulles. Résoudre le système $\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{a_i + b_j} = 1$, pour tout $i = 1, \dots, n$ (en utilisant la décomposition en éléments

simples de $R = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{X + b_j}$).