

# Planche n° 21. Systèmes linéaires. Corrigé

n° 1 :  $m$  est un paramètre réel.

1)  $\det(S) = 2(m(m-5)-6) + (3(m-5)-3) + 7(6-m) = 2m^2 - 14m + 12 = 2(m-1)(m-6)$ . Le système est de CRAMER si et seulement si  $m \notin \{1, 6\}$ .

• Si  $m \notin \{1, 6\}$ , les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{4m^2 - 42m + 108}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2(m-6)(2m-9)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{2m-9}{m-1}$$

$$y = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 7 & 7 & m-5 \end{vmatrix} = \frac{14m-84}{2(m-1)(m-6)} = \frac{14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = \frac{7}{m-1}$$

$$z = \frac{1}{2(m-1)(m-6)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & m & 5 \\ 7 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \frac{-14m+84}{2(m-1)(m-6)} = \frac{-14(m-6)}{2(m-1)(m-6)} = -\frac{7}{m-1}$$

$$\text{Si } m \notin \{1, 6\}, \mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{2m-9}{m-1}, \frac{7}{m-1}, -\frac{7}{m-1} \right) \right\}.$$

• Si  $m = 1$ , le système s'écrit  $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \\ 7x + 3y - 4z = 7 \end{cases}$ . Or,

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + y + 2z = 5 \\ 7x + 3y - 4z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ -x + y + 2(4 - 2x - 3y) = 5 \\ 7x + 3y - 4(4 - 2x - 3y) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ 5x + 5y = 3 \\ 15x + 15y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ x + y = 3/5 \\ x + y = 23/15 \end{cases}.$$

$$\text{Si } m = 1, \mathcal{S} = \emptyset.$$

• Si  $m = 6$ , le système s'écrit  $\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = 7 \end{cases}$ . Or,

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + 6y + 2z = 5 \\ 7x + 3y + z = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ -x + 6y + 2(4 - 2x - 3y) = 5 \\ 7x + 3y + (4 - 2x - 3y) = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - 3y \\ -5x = -3 \\ 5x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ z = \frac{14}{5} - 3y \end{cases}.$$

$$\text{Si } m = 6, \mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{3}{5}, y, \frac{14}{5} - 3y \right), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Autre solution** (dans le cas où  $m \in \{1, 6\}$ ). Un déterminant principal est  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ . On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et  $x$  et  $z$  comme inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à

$$\begin{cases} x = \frac{3 + (m-6)y}{5} \\ z = \frac{14 - (2m+3)y}{5} \end{cases}.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité (les termes en  $y$  disparaissent automatiquement pour  $m \in \{1, 6\}$  et donc pas la peine de les calculer).

$$7x + 2y + (m-5)z = 7 \Leftrightarrow 7\frac{3+(m-6)y}{5} + 3y + (m-5)\frac{14-(2m+3)y}{5} = 7 \Leftrightarrow 21 + 14(m-5) - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow 14(m-6) = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

Si  $m = 1$ , le système n'a pas de solution et si  $m = 6$ , l'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( \frac{3}{5}, y, \frac{14}{5} - 3y \right), y \in \mathbb{R} \right\}$ .

2)  $\det(S) = 2(-8m - 4 + 2) - (4m + 1) + 5(2m + 2m + 1) = 0$ . Le système n'est jamais de CRAMER. Un déterminant principal est  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ . On peut choisir les deux premières équations comme équations principales et  $x$  et  $z$  comme

inconnues principales. Le système des deux premières équations équivaut à  $\begin{cases} x = \frac{6m-4-(4m+1)y}{3} \\ z = \frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} \end{cases}$ . La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité.

$$5x - y + 4z = 3m - 2 \Leftrightarrow 5\frac{6m-4-(4m+1)y}{3} - y + 4\frac{-3m+8+(5m+2)y}{3} = 3m - 2$$

$$\Leftrightarrow 5(6m-4) + 4(-3m+8) - 3(3m-2) = 0 \Leftrightarrow 9(m+2) = 0 \Leftrightarrow m = -2.$$

$$\text{Si } m \neq -2, \mathcal{S} = \emptyset. \text{ Si } m = -2, \mathcal{S} = \left\{ \left( \frac{-16+7y}{3}, y, \frac{14-8y}{3} \right), y \in \mathbb{R} \right\}.$$

3)  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & -1 & -m \end{vmatrix} = -2m^2 + 2m = -2m(m-1)$ . Le système est de CRAMER en  $x, y$  et  $z$  si et seulement si  $m \notin \{0, 1\}$ .

• Si  $m \notin \{0, 1\}$ , les formules de CRAMER fournissent :

$$x = \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 3-t & 1 & 1 \\ m+2+mt & m & 1 \\ -1+t & -1 & -m \end{vmatrix} = \frac{(2m^2-2m)t + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -t + 1$$

$$y = \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 3-t & 1 \\ 1 & m+2+mt & 1 \\ m & -1+t & -m \end{vmatrix} = \frac{(-2m^2-2m) + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = \frac{m+1}{m-1}t + 1$$

$$z = \frac{1}{-2m(m-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-t \\ 1 & m & m+2+mt \\ m & -1 & -1+t \end{vmatrix} = \frac{(2m^2+2m)t + (-2m^2+2m)}{-2m(m-1)} = -\frac{m+1}{m-1}t + 1.$$

$$\text{Si } m \notin \{0, 1\}, \mathcal{S} = \left\{ \left( -t + 1, \frac{m+1}{m-1}t + 1, -\frac{m+1}{m-1}t + 1, t \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

• Si  $m = 0$ , on écrit  $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + z = 2 \\ y + t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2 - x \\ t = 1 - y \end{cases}$ .

$$\text{Si } m = 0, \mathcal{S} = \{(x, y, 2-x, 1-y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• Si  $m = 1$ , on écrit  $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + y + z - t = 3 \\ x - y - z - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ x = 1 \\ z = 2 - y \end{cases}$ . Dans ce cas, l'ensemble de solutions est  $\{(1, y, 2-y, 0), z \in \mathbb{R}\}$ .

$$\text{Si } m = 1, \mathcal{S} = \{(1, y, 2-y, 0), y \in \mathbb{R}\}.$$

4)

$$\begin{aligned}
\det(S) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & m & 1 & 2 \\ m & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+6 & 2 & 3 & m \\ m+6 & 1 & m & 3 \\ m+6 & m & 1 & 2 \\ m+6 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \\
&= (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 1 & m & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 0 & -1 & m-3 & 3-m \\ 0 & m-2 & -2 & 2-m \\ 0 & 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} \quad (L_i \leftarrow L_i - L_1, \text{ pour } i \in \{2, 3, 4\}) \\
&= (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 3-m \\ m-2 & -2 & 2-m \\ 1 & -1 & 1-m \end{vmatrix} = (m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & -m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} \quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2) \\
&= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 & 0 \\ m-3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= -m(m+6) \begin{vmatrix} -1 & m-3 \\ m-3 & -1 \end{vmatrix} = m(m-2)(m-4)(m+6).
\end{aligned}$$

Le système est de CRAMER si et seulement si  $m \notin \{0, 2, 4, -6\}$ . Dans ce cas, les formules de CRAMER fournissent

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)x &= \begin{vmatrix} m-1 & 2 & 3 & m \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-(m-1) & 3-m(m-1) & m-3(m-1) \\ 1 & 1 & m & 3 \\ 0 & m & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} 3-m & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ m & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5m-6 & -m^2+5m-3 & -2m+3 \\ m-6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -[-3(5m-6) - (m-6)(-m^2+5m-3)] \\
&= -m^3 + 11m^2 - 18m = -m(m-2)(m-9).
\end{aligned}$$

$$\text{et } x = -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)y &= \begin{vmatrix} 1 & m-1 & 3 & m \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & 0 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 2 & 1 & m & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ m & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - (m-1)L_2) \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m^2+m+3 & -2m+3 \\ 3 & 1 & 2 \\ m & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3m^2-5m-6 & -m^2+m+3 & 2m^2-4m-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ m-6 & 2 & -3 \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2, C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2) \\
&= -3(3m^2-5m-6) - (m-6)(2m^2-4m-3) \\
&= -2m^3 + 7m^2 - 6m = -m(2m-3)(m-2)
\end{aligned}$$

$$\text{et } y = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)z &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & m-1 & m \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & 0 & -2m+3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & m & 0 & 2 \\ m & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= - \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -2m+3 \\ 3 & m & 2 \\ m & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(-2m+3)(m-6) + 3(5m-6) - m(2m^2-5m+6) = -2m^3 + 7m^2 - 6m \\
&= -m(2m-3)(m-2),
\end{aligned}$$

$$\text{et } z = -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}.$$

$$\begin{aligned}
m(m-2)(m-4)(m+6)t &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & m-1 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 & 0 \\ 2 & 1 & m & 1 \\ 3 & m & 1 & 0 \\ m & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2m+3 & -m+3 & -m^2+m+3 \\ 3 & m & 1 \\ m & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-2m+3)(2m-3) - 3(3m^2-5m-3) + m(m^3-m^2-4m+3) \\
&= m^4 - m^3 - 17m^2 + 30m = m(m-2)(m^2+m-15)
\end{aligned}$$

$$\text{et } t = \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)}.$$

$$\text{Si } m \notin \{0, 2, 4, 6\}, \mathcal{S} = \left\{ \left( -\frac{m-9}{(m-4)(m+6)}, -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}, -\frac{2m-3}{(m-4)(m-6)}, \frac{m^2+m-15}{(m-4)(m-6)} \right) \right\}.$$

- Si  $m = 0$ , le système s'écrit

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+2y+3z = -1 \\ 2x+y+3t = 1 \\ 3x+z+2t = 0 \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t = 0 \text{ (E}_1 + \text{E}_2) \\ 2x+y+3t = 1 \\ x+y+z+t = 0 \text{ (E}_3 + \text{E}_4) \\ 3y+2z+t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ -x-2y-3z = 1 \\ -x+2y+z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} t = -x-y-z \\ z = x-2y \\ -x-2y-3(x-2y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \frac{1}{4} \\ z = -x - \frac{1}{2} \\ t = -x + \frac{1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\text{Si } m = 0, \mathcal{S} = \left\{ \left( x, x + \frac{1}{4}, -x - \frac{1}{4}, -x + \frac{1}{2} \right), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Si  $m = 2$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ 2x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = \frac{1}{4} (E_1 + E_3) \\ x + y + z + t = \frac{1}{4} (E_2 + E_4) \\ 3x + 2y + z + 2t = 0 \\ 2x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} - x - y - z \\ x - z = -\frac{1}{2} \\ x + 2y + z = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} - x - y - z \\ z = x + \frac{1}{2} \\ 2x + 2y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x - \frac{3}{8} \\ z = x + \frac{1}{2} \\ t = -x + \frac{1}{8} \end{cases}.$$

$$\text{Si } m = 2, \mathcal{S} = \left\{ \left( x, -x - \frac{3}{8}, x + \frac{1}{2}, -x + \frac{1}{8} \right), x \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Si  $m = 4$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 3 \\ 2x + y + 4z + 3t = 1 \\ 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = \frac{3}{5} (E_1 + E_4) \\ x + y + z + t = \frac{1}{5} (E_2 + E_3) \\ 3x + 4y + z + 2t = 0 \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } m = 4, \mathcal{S} = \emptyset.$$

- Si  $m = -6$ , le système s'écrit

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 6t = -7 \\ 2x + y - 6z + 3t = 1 \\ 3x - 6y + z + 2t = 0 \\ -6x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = -2 (E_1 + E_2) \\ 2x + y - 6z + 3t = 1 \\ x + y - z - t = 0 (E_3 + E_4) \\ 4x + 3y + 2z + t = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Si } m = -6, \mathcal{S} = \emptyset.$$

$$5) \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ -1 & -1 & m \\ 1 & -1 & -m \end{vmatrix} = m(2m) + (-m + 1) + (m + 1) = 2(m^2 + 1) \neq 0 \text{ (} m \text{ désignant un paramètre réel).}$$

Le système formé des équations n° 1, n° 2 et n° 4 est donc de CRAMER. Les formules de CRAMER fournissent alors :

$$x = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1}, y = 3 - m \text{ et } z = \frac{3m - 1}{m^2 + 1}.$$

La troisième équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$\begin{aligned} -m \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 + 1} + 3 - m + m \frac{3m - 1}{m^2 + 1} &= -m \\ \Leftrightarrow -m(2m^2 - m - 1) + (3 - m)(m^2 + 1) + m(3m - 1) &= -m(m^2 + 1) \\ \Leftrightarrow -2m^3 + 7m^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Le système est compatible si et seulement si  $m$  est l'une des trois racines de l'équation  $-2X^3 + 7X^2 + 3 = 0$ .

$$6) \det S = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \frac{\text{Van}(a, b, c)}{abc}.$$

Si  $a, b$  et  $c$  sont deux à deux distincts, le système est de CRAMER. On obtient :

$$x = \frac{abc \operatorname{Van}(m, b, c)}{mbc \operatorname{Van}(a, b, c)} = \frac{a(b-m)(c-m)}{m(b-a)(c-a)},$$

puis, par symétrie des rôles,  $y = \frac{b(a-m)(c-m)}{m(a-b)(c-b)}$  et  $z = \frac{c(a-m)(b-m)}{m(a-c)(b-c)}$ .

Si  $a = b \neq c$  (ou  $a = c \neq b$  ou  $b = c \neq a$ ), le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ ax + ay + cz = m \\ \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}y + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ a(1-z) + cz = m \\ \frac{1}{a}(1-z) + \frac{1}{c}z = \frac{1}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z \\ z = \frac{m-a}{c-a} \\ \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \frac{m-a}{c-a} = \frac{1}{m} - \frac{1}{a} \end{cases}.$$

Le système est compatible si et seulement si  $(m-a)(m-c) = 0$  ou encore ( $m = a$  ou  $m = c$ ). Dans ce cas, l'ensemble des solutions est :  $\left\{ \left( x, \frac{m-c}{a-c} - x, \frac{m-a}{c-a} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$ .

Si  $a = b = c$ , le système s'écrit :  $x + y + z = 1 = \frac{m}{a} = \frac{a}{m}$ . Le système est compatible si et seulement si  $m = a = b = c$  et dans ce cas l'ensemble des solutions est :  $\{(x, y, 1 - x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ .

7)

$$\begin{aligned} \det(S) &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - (b+c)^2 & (a+c)^2 - b^2 & 0 \\ a^2 - (b+c)^2 & 0 & (a+b)^2 - c^2 \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a-b-c & a+c-b & 0 \\ a-b-c & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & a+c-b & 0 \\ -2b & 0 & a+b-c \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3) \\ &= 2(a+b+c)^2 (bc(a+c-b)(a+b-c) + cb^2(a+b-c) + bc^2(a+c-b)) \\ &= 2bc(a+b+c)^2 ((a+c-b)(a+b-c) + b(a+b-c) + c(a+c-b)) \\ &= 2bc(a+b+c)^2 (a^2 + ab + ac) = 2abc(a+b+c)^3. \end{aligned}$$

Si  $abc(a+b+c) \neq 0$ , le système est de CRAMER et on obtient après calcul :

$$x = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2abc(a+b+c)}, \quad y = \frac{(b+c-a)(b+a-c)}{2abc(a+b+c)} \quad \text{et} \quad z = \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{2abc(a+b+c)}.$$

Si  $a = 0$  (ou  $b = 0$  ou  $c = 0$ ), le système s'écrit :

$$\begin{cases} (b+c)^2 x + b^2 y + c^2 z = 1 \\ c^2 (y+z) = 1 \\ b^2 (y+z) = 1 \end{cases}.$$

Donc,

- Si ( $(a = 0$  et  $b^2 \neq c^2$ ) ou  $(b = 0$  et  $a^2 \neq c^2$ ) ou  $(c = 0$  et  $a^2 \neq b^2$ )), le système n'a pas de solution.
- Si  $a = 0$  et  $b = c \neq 0$ , l'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( 0, y, -y + \frac{1}{b^2} \right), y \in \mathbb{R} \right\}$  (résultats analogues pour les cas  $(b = 0$  et  $a = c \neq 0)$  et  $(c = 0$  et  $a = b \neq 0)$ ).
- Si  $a = b = c = 0$ , il n'y a pas de solution.
- Si  $a = 0$  et  $c = -b \neq 0$ , l'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( x, y - \frac{1}{b^2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$  (résultats analogues pour  $(b = 0$  et  $c = -a \neq 0)$  et  $(c = 0$  et  $b = -a \neq 0)$ ).

- Si  $abc \neq 0$  et  $a + b + c = 0$ , le système équivaut à l'équation  $a^2x + b^2y + c^2z = 1$ .

L'ensemble des solutions est  $\left\{ \left( x, y, \frac{1 - a^2x - b^2y}{c^2} \right), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ .

8)

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)((a-b)(a-c) + (b-c)^2) = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\ &= (a+b+c)(a+ib+j^2c)(a+j^2b+jc) \end{aligned}$$

Si  $\det S \neq 0$ , les formules de CRAMER fournissent :

$$x \det(S) = \begin{vmatrix} p & b & c \\ q & a & b \\ r & c & a \end{vmatrix} = p(a^2 - bc) + q(c^2 - ab) + r(b^2 - ac).$$

On finit aisément.

9) Soit  $P = X^3 - X - 1$ .  $P$  et  $P' = 3X^2 - 1$  n'ont pas de racines communes dans  $\mathbb{C}$  car  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  ne sont pas racines de  $P$  et donc les racines de  $P$  sont simples ou encore,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont deux à deux distincts. Ainsi,  $\det S = \text{Van}(a, b, c) \neq 0$  et le système est de CRAMER.

$$(b-a)(c-a)(c-b)x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & b & c \\ 3 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = -2(c^2 - b^2) + 3(c-b) = (c-b)(3 - 2(b+c)) = (c-b)(3+2a),$$

(car  $a + b + c = 0$ ) et  $x = \frac{3+2a}{(b-a)(c-a)}$ .

$$(b-a)(c-a)(c-b)y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & c \\ a^2 & 3 & c^2 \end{vmatrix} = 2(c^2 - a^2) - 3(c-a) = (c-a)(2(a+c) - 3) = -(c-a)(3+2b),$$

et  $y = -\frac{3+2b}{(b-a)(b-c)}$ .

$$(b-a)(c-a)(c-b)z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \\ a^2 & b^2 & 3 \end{vmatrix} = -2(b^2 - a^2) + 3(b-a) = (b-a)(3+2c),$$

et  $z = \frac{3+2c}{(c-a)(c-b)}$  (difficile d'aller plus loin).

n° 2 :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2(-7) = -12 \neq 0$  et le système est de CRAMER en  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_4$ . On note aussi que le système est homogène de rang 3 et donc que l'ensemble des solutions  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  de dimension  $5 - 3 = 2$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \\ x_2 - 2x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ 2x_1 + x_2 = 5x_3 + 4x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}((-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + x_3 + 2x_5) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = x_3 - x_5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_1 + 5x_3 + 4x_5 \\ x_4 = -x_1 + 3x_3 + 3x_5 \\ x_1 + 2(-2x_1 + 5x_3 + 4x_5) + 3(-x_1 + 3x_3 + 3x_5) = x_3 - x_5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 + 3x_5 \\ x_2 = -x_3 - 2x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est  $F = \{(3x_3 + 3x_5, -x_3 - 2x_5, x_3, 0, x_5), (x_3, x_5) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(e_1, e_2)$  où  $e_1 = (3, -1, 1, 0, 0)$  et  $e_2 = (3, -2, 0, 0, 1)$  et, puisque  $\dim F = 2$ , une base de  $F$  est  $(e_1, e_2)$ .

**n° 3 :** Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $z_k$  est l'affixe complexe de  $M_k$  et  $a_k$  est l'affixe complexe de  $A_k$ . Le problème posé équivaut au système :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, z_k + z_{k+1} = 2a_k \text{ et } z_n + z_1 = 2a_n.$$

Le déterminant de ce système vaut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1^{n-1} \text{ (en développant suivant la première colonne)}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1}.$$

**1er cas.** Si  $n$  est impair,  $\det S = 2 \neq 0$  et le système admet une et une seule solution.

On obtient  $z_2 = 2a_1 - z_1$ ,  $z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots$ ,  $z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1$  et enfin :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots + 2a_2 - 2a_1 + z_1 + z_1 = 2a_n,$$

et donc  $z_1 = a_1 - a_2 + \dots - a_{n-1} + a_n$  puis  $z_2 = a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} - a_n$  puis  $z_3 = -a_1 + a_2 + a_3 - a_4 \dots + a_n \dots$  puis  $z_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ .

Si  $n$  est impair, le problème posé a une et une seule solution.

**2ème cas.** Si  $n$  est pair,  $\det S = 0$  mais le mineur formé des  $n-1$  premières lignes et  $n-1$  dernières colonnes est non nul. Donc, le système est de rang  $n-1$ , les  $n-1$  premières équations et  $n-1$  dernières inconnues peuvent être choisies pour équations et inconnues principales.

On résout les  $n-1$  premières équations constituant un système de CRAMER en  $z_2, \dots, z_n$ . On obtient

$$z_2 = 2a_1 - z_1, z_3 = 2a_2 - 2a_1 + z_1, \dots, z_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1.$$

La dernière équation fournit alors une condition nécessaire et suffisante de compatibilité :

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} + \dots - 2a_2 + 2a_1 - z_1 + z_1 = 2a_n \Leftrightarrow a_1 + a_3 \dots = a_2 + a_4 + \dots$$

Cette dernière condition se traduit géométriquement par le fait que les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  ont même isobarycentre.

En résumé, si  $n$  est pair et si les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  n'ont pas même isobarycentre, le problème n'a pas de solutions.

Si  $n$  est pair et si les systèmes de points  $(A_1, A_3, \dots)$  et  $(A_2, A_4, \dots)$  ont même isobarycentre, le problème a une infinité de solutions :  $M_1$  est un point quelconque puis on construit les symétriques successifs par rapport aux points  $A_1, A_2 \dots$

**n° 4 :** Soit  $D_n$  le déterminant du système pour  $n \geq 3$ .

En développant ce déterminant suivant sa première colonne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 5, D_n = D_{n-1} - D_{n-2},$$

ce qui fournit aisément par récurrence, en tenant compte de  $D_3 = D_4 = -1$  :

$$\forall k \geq 1, D_{3k} = D_{3k+1} = (-1)^k \text{ et } D_{3k+2} = 0.$$

Pour  $n$  élément de  $3\mathbb{N}^* \cup (1 + 3\mathbb{N}^*)$ , le système est de CRAMER et homogène et admet donc une et une seule solution à savoir la solution nulle.

Pour  $n = 3k + 2$ , puisque  $D_n = 0$  mais que le mineur de format  $n-1$  constitué des  $n-1$  premières lignes et colonnes est  $D_{n-1}$  et est donc non nul, le système est homogène de rang  $n-1$  et l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension 1. On trouve aisément  $S = \{\lambda(1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots, 1, -1), ; \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

**n° 5 :** (1)⇒(2).

Montrons par récurrence sur  $n \geq 1$  que :  $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E^n / (\det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0) \Rightarrow ((f_1, \dots, f_n)$  liée).

• Pour  $n = 1$ ,

$$(\forall \mathbf{a}_1 \in E / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq 1} = 0) \Rightarrow (\forall \mathbf{a}_1 / f_1(\mathbf{a}_1) = 0) \Rightarrow (f_1 = 0) \Rightarrow (f_1) \text{ liée.}$$

• Soit  $n \geq 2$ . Supposons que  $(\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}) \in E^{n-1} / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} = 0) \Rightarrow (f_1, \dots, f_{n-1})$  liée.

Soient  $f_1, \dots, f_n$   $n$  fonctions telles que  $\forall (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E^n / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} = 0$ .

Si  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  est liée alors  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée en tant que sur famille d'une famille liée.

Si  $(f_1, \dots, f_{n-1})$  est libre, par hypothèse de récurrence, il existe  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}$   $n - 1$  éléments de  $E$  tels que  $\det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$ . Mais, par hypothèse, on a :

$$\forall x \in E, \det(f_i(\mathbf{a}_1), \dots, f_i(\mathbf{a}_{n-1}), f_i(x))_{1 \leq i \leq n} = 0.$$

En développant ce déterminant suivant sa dernière colonne, on obtient une égalité du type  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$  où les  $\lambda_i$  sont

indépendants de  $x$  ou encore une égalité du type  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$  avec  $\lambda_n = \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n-1} \neq 0$  ce qui montre encore que  $(f_1, \dots, f_n)$  est liée.

(2)⇒(1). On suppose que  $\exists (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in E^n / \det(f_i(\mathbf{a}_j))_{1 \leq i, j \leq n} \neq 0$ . Montrons que  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$ . En particulier :  $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(\mathbf{a}_j) = 0$ . Les  $n$  égalités précédentes

fournissent un système d'équations linéaires en les  $\lambda_i$  à  $n$  inconnues,  $n$  équations, de déterminant non nul et homogène ou encore un système de CRAMER homogène dont on sait qu'il admet pour unique solution  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ . On a montré que  $(f_1, \dots, f_n)$  est libre.

**n° 6 :** Soit  $A_n$  la matrice de l'énoncé.

En développant  $\det(A_n)$  suivant sa première colonne puis en développant le déterminant de format  $n - 1$  obtenu suivant sa première ligne, on obtient  $\det A_n = -\det A_{n-2}$  pour  $n \geq 3$ .

Par suite, pour  $p \geq 1, \det A_{2p} = (-1)^{p-1} \det A_2 = (-1)^p \neq 0$  et pour  $p \geq 1, A_{2p}$  est inversible.

On a aussi, pour  $p \geq 1, \det A_{2p+1} = (-1)^{p-1} \det A_3 = 0$  et, pour  $p \geq 1, A_{2p+1}$  n'est pas inversible. Finalement,  $A_n$  est inversible si et seulement si  $n$  est pair.

Dorénavant, on pose  $n = 2p$  ( $p \geq 1$ ).

Pour  $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$  vecteurs colonnes donnés, on a :

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ \forall i \in \llbracket 2, 2p-1 \rrbracket, x_{i-1} + x_{i+1} = y_i \\ x_{2p-1} = y_{2p} \end{cases} .$$

Ce système se résout en  $x_2 = y_1$  puis, par récurrence, pour  $k \leq p, x_{2k} = y_{2k-1} - y_{2k-3} + \dots + (-1)^{k-1} y_1$  et aussi  $x_{2p-1} = y_{2p}$ , puis par récurrence, pour  $k \leq p, x_{2k-1} = y_{2k} - y_{2k+2} + \dots + (-1)^{p-k} y_{2p}$ . D'où l'inverse de  $A$  quand  $n = 8$  par exemple :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

**n° 7 :** Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $F = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X + b_k}$ .

La fraction rationnelle  $F$  s'écrit, après réduction au même dénominateur :

$$F = \frac{P}{Q} \text{ où } Q = \prod_{k=1}^n (X + b_k) \text{ et } P \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à } n - 1.$$

Maintenant,

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ solution de (S)} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F(a_k) = 1 \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (Q - P)(a_k) = 0.$$

Par suite, puisque les  $a_k$  sont deux à deux distincts,  $Q - P$  est divisible par  $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$ . Mais,  $Q$  est unitaire de degré  $n$

et  $P$  est de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ , et donc  $Q - P$  est unitaire de degré  $n$  ce qui montre que  $Q - P = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$  ou encore que

$$P = \prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

Réciproquement, si  $F = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}$ , alors  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F(a_k) = 1$ .

En résumé,

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ solution de (S)} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{X + b_k} = \frac{\prod_{k=1}^n (X + b_k) - \prod_{k=1}^n (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \lim_{x \rightarrow -b_i} (x + b_i) \frac{\prod_{k=1}^n (x + b_k) - \prod_{k=1}^n (x - a_k)}{\prod_{k=1}^n (x + b_k)} \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = \frac{\prod_{k=1}^n (b_i + a_k)}{\prod_{k \neq i} (b_k - b_i)}. \end{aligned}$$