

Planche n° 22. Limite en un point

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (**)** Soit f une fonction réelle d'une variable réelle définie et continue sur un voisinage de $+\infty$. On suppose que la fonction $f(x+1) - f(x)$ admet dans \mathbb{R} une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

n° 2 : (**)** Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0 telle que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$.)

n° 3 : (I)** Soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que $\text{Min}\{f, g\}$ et $\text{Max}\{f, g\}$ sont continues en x_0 .

n° 4 : (I)** (Distance d'un point à une partie) Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \text{Inf}\{|y - x|, y \in A\}.$$

Montrer que f est continue en tout point de \mathbb{R} .

n° 5 : (T)** Montrer en revenant à la définition que $f(x) = \frac{3x-1}{x-5}$ est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

n° 6 : (IT)** Montrer que la fonction caractéristique de \mathbb{Q} est discontinue en chacun de ses points.

n° 7 : (**)** Etudier l'existence d'une limite et la continuité éventuelle en chacun de ses points de la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(x) = \frac{1}{p+q}$ si x est rationnel égal à $\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible.

n° 8 : (IT)** Etudier en chaque point de \mathbb{R} l'existence d'une limite à droite, à gauche, la continuité de la fonction f définie par $f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et 1 si $x = 0$.

n° 9 : (I)** Trouver f bijective de $[0, 1]$ sur lui-même et discontinue en chacun de ses points.

n° 10 : (**I)** Soit f une fonction définie et périodique sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , admettant une limite réelle quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f est constante.