

Planche n° 22. Limites. Corrigé

n° 1 : Il existe $\alpha > 0$ tel que f est définie et continue sur $[\alpha, +\infty[$.

1er cas. Supposons que ℓ est réel. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists A_1 \geq \alpha / \forall X \in [\alpha, +\infty[, \left(X \geq A_1 \Rightarrow \ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(X+1) - f(X) < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soit $X \geq A_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \sum_{k=0}^{n-1} (f(X+k+1) - f(X+k)) = f(X+n) - f(X) < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right),$$

et on a donc montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_1 \geq \alpha / \forall X \geq A_1, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) < f(X+n) - f(X) < n \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Soient de nouveau $\varepsilon > 0$ puis A_1 associé comme ci-dessus. Soient ensuite $x \geq A_1 + 1$ puis $n = E(x - A_1) \in \mathbb{N}^*$ puis $X = x - n$.

On a $X = x - E(x - A_1) \geq x - (x - A_1) = A_1$ et donc $n \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) < f(x) - f(x - n) < n \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ ou encore

$$\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) < \frac{f(x)}{x} < \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Ensuite,

$$1 - \frac{A_1 + 1}{x} = \frac{x - A_1 - 1}{x} \leq \frac{n}{x} = \frac{E(x - A_1)}{x} \leq \frac{x - A_1}{x} = 1 - \frac{A_1}{x},$$

et comme $1 - \frac{A_1 + 1}{x}$ et $1 - \frac{A_1}{x}$ tendent vers 1 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit que $\frac{n}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

D'autre part, puisque f est continue sur le segment $[A_1, A_1 + 1]$, f est bornée sur ce segment. Or $n \leq x - A_1 < n + 1$ s'écrit encore $A_1 \leq x - n < A_1 + 1$ et donc, en posant $M = \sup\{|f(t)|, t \in [A_1, A_1 + 1]\}$, on a $\left| \frac{x-n}{x} \right| \leq \frac{M}{x}$ qui tend vers 0 quand x

tend vers $+\infty$. En résumé, $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right)$ et $\frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right)$ tendent respectivement vers $\ell - \frac{\varepsilon}{2}$ et $\ell + \frac{\varepsilon}{2}$ quand

x tend vers $+\infty$. On peut donc trouver un réel $A_2 \geq \alpha + n$ tel que $x \geq A_2 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) > \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon$

et un réel $A_3 \geq \alpha + n$ tel que $x \geq A_3 \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{n}{x} \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) < \ell + \varepsilon$.

Soient $A = \text{Max}(A_1, A_2, A_3)$ et $x \geq A$. On a $\ell - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0, (\exists A \geq \alpha / \forall x \geq A, \ell - \varepsilon <$

$\frac{f(x)}{x} < \ell + \varepsilon$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.

2ème cas. Supposons $\ell = +\infty$ (si $\ell = -\infty$, remplacer f par $-f$).

Soit $B > 0$. $\exists A_1 \geq \alpha / \forall X \geq A_1, f(X+1) - f(X) \geq 2B$.

Pour $X \geq A_1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f(X+n) - f(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(X+k+1) - f(X+k)) \geq 2nB$.

Soient $x \geq 1 + A_1$, $n = E(x - A_1)$ et $X = x - n$. On a $f(x) - f(x - n) \geq 2nB$ et donc,

$$\frac{f(x)}{x} \geq \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x},$$

qui tend vers $2B$ quand x tend vers $+\infty$ (démarche identique au 1er cas).

Donc $\exists A \geq A_1 > \alpha$ tel que $x \geq A \Rightarrow \frac{f(x-n)}{x} + \frac{2nB}{x} > B$.

Finalement : $\forall B > 0, \exists A > \alpha / \forall x \geq A, \frac{f(x)}{x} > B$ et donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

n° 2 : Pour $x \neq 0$, posons $g(x) = \frac{f(2x) - f(x)}{x}$. f est définie sur un voisinage de 0 et donc il existe $\alpha > 0$ tel que $] -\alpha, \alpha[\subset D_f$. Mais alors, $] -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[\setminus \{0\} \subset D_g$.

Soient $x \in] -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{2^{k+1}} g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Par suite, pour $x \in] -\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}[\setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, g tend vers 0 quand x tend vers 0 et donc

$$\exists \alpha \in]0, \frac{\alpha}{2}[\quad [/ \forall X \in] -\alpha, \alpha[, |g(X)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour $x \in] -\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ et pour k dans \mathbb{N}^* , $\frac{x}{2^k}$ est dans $] -\alpha, \alpha[\setminus \{0\}$ et par suite,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} \left| g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et donc, $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|$. On a ainsi montré que

$$\forall x \in] -\alpha, \alpha[\setminus \{0\}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \frac{f(x/2^n)}{x} \right|.$$

Maintenant, quand x fixé, $\frac{f(x/2^n)}{x}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc, pour x donné, on peut choisir n tel que $\frac{f(x/2^n)}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$ et on a alors $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \left(\forall x \in D_f, 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} \right| < \varepsilon \right),$$

ce qui montre que (f est dérivable en 0 et que) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

n° 3 : $\text{Min}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$ et $\text{Max}(f, g) = \frac{1}{2}(f - g + |f - g|)$ sont continues en x_0 en vertu de théorèmes généraux.

n° 4 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in A$. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$. Or, $|x - z| \geq d(x, A)$ et donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in A, d(x, A) - |x - y| \leq |y - z|.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède, $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - z|, z \in A\}$ et comme $d(y, A)$ est le plus grand des minorants de cet ensemble, on en déduit que $d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$. On a montré que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, A) - d(y, A) \leq |y - x|.$$

En échangeant les rôles de x et y , on a aussi montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(y, A) - d(x, A) \leq |y - x|$ et finalement,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|.$$

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ puis $\alpha = \varepsilon$. Pour $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| < \alpha = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$ et donc f est continue en tout x_0 réel. (Revoir cet exercice dans la planche suivante avec en plus la notion de fonction lipschitzienne.)

n° 5 : Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{5\}$. Pour $x \neq 5$,

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{3x-1}{x-5} - \frac{3x_0-1}{x_0-5} \right| = \frac{14|x-x_0|}{|x-5| \times |x_0-5|}.$$

Puis, pour $x \in \left] x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2} \right[$, on a $|x-5| > \frac{|x_0-5|}{2} (> 0)$, et donc,

$$\forall x \in \left] x_0 - \frac{|x_0-5|}{2}, x_0 + \frac{|x_0-5|}{2} \right[, |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0|.$$

Soient $\varepsilon > 0$ puis $\alpha = \text{Min} \left\{ \frac{|x_0-5|}{2}, \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28 \times 2} \right\} (> 0)$.

$$|x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} |x-x_0| \leq \frac{28}{(x_0-5)^2} \frac{(x_0-5)^2 \varepsilon}{28 \times 2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On a monté que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\}, |x-x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$. f est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

n° 6 : Soit χ la fonction caractéristique de \mathbb{Q} . Soit x_0 un réel. On note que

$$x_0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, x_0 + \frac{\pi}{n} \notin \mathbb{Q}.$$

Donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left(x_0 + \frac{1}{n} \right)$ existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left(x_0 + \frac{\pi}{n} \right)$ existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left(x_0 + \frac{1}{n} \right) = \chi(x_0) \neq 1 - \chi(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \chi \left(x_0 + \frac{\pi}{n} \right),$$

bien que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_0 + \frac{\pi}{n} = x_0$. Ainsi, pour tout réel $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de \mathbb{Q} n'a pas de limite en x_0 et est donc discontinue en x_0 .

n° 7 : Soit a un réel strictement positif. On peut déjà noter que $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} f(x) = 0$. Donc, si f a une limite quand x tend vers a , ce ne peut être que 0 et f est donc discontinue en tout rationnel strictement positif.

a désigne maintenant un irrationnel strictement positif fixé. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit x un réel strictement positif tel que $f(x) \geq \varepsilon$.

x est nécessairement rationnel, de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers naturels non nuls premiers entre eux vérifiant $\frac{1}{p+q} \geq \varepsilon$ et donc

$$2 \leq p+q \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

Mais il n'y a qu'un nombre fini de couples d'entiers naturels non nuls (p, q) vérifiant ces inégalités et donc, il n'y a qu'un nombre fini de réels strictement positifs x tels que $f(x) \geq \varepsilon$.

Par suite, $\exists \alpha > 0$ tel que aucun des réels x de $]a - \alpha, a + \alpha[$ ne vérifie $f(x) \geq \varepsilon$. Donc,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x > 0, (0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon),$$

ou encore

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow a, x \neq a} f(x) = 0 = f(a).$$

Ainsi, f est continue en tout irrationnel et discontinue en tout rationnel.

n° 8 : Donnons tout d'abord une expression plus explicite de $f(x)$ pour chaque réel x .

- Si $x > 1$, alors $\frac{1}{x} \in]0, 1[$ et donc, $f(x) = 0$.
- Si $\exists p \in \mathbb{N}^* / x \in \left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$, $f(x) = px$.
- $f(0) = 1$ (et plus généralement, $\forall p \in \mathbb{Z}^*, f\left(\frac{1}{p}\right) = 1$).

- Si $x \leq -1$, alors $\frac{1}{x} \in [-1, 0[$ et donc, $f(x) = -x$.
- Enfin, si $\exists p \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\}$ tel que $x \in \left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$, alors $\frac{1}{p+1} < x \leq \frac{1}{p} (< 0)$ fournit, par décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $] -\infty, 0[$, $p \leq \frac{1}{x} < p+1 (< 0)$ et donc $f(x) = px$.

Etude en 0. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ et donc $1 - x < f(x) \leq 1$ si $x > 0$ et $1 \leq f(x) < 1 - x$ si $x < 0$. Par suite,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - 1| \leq |x|,$$

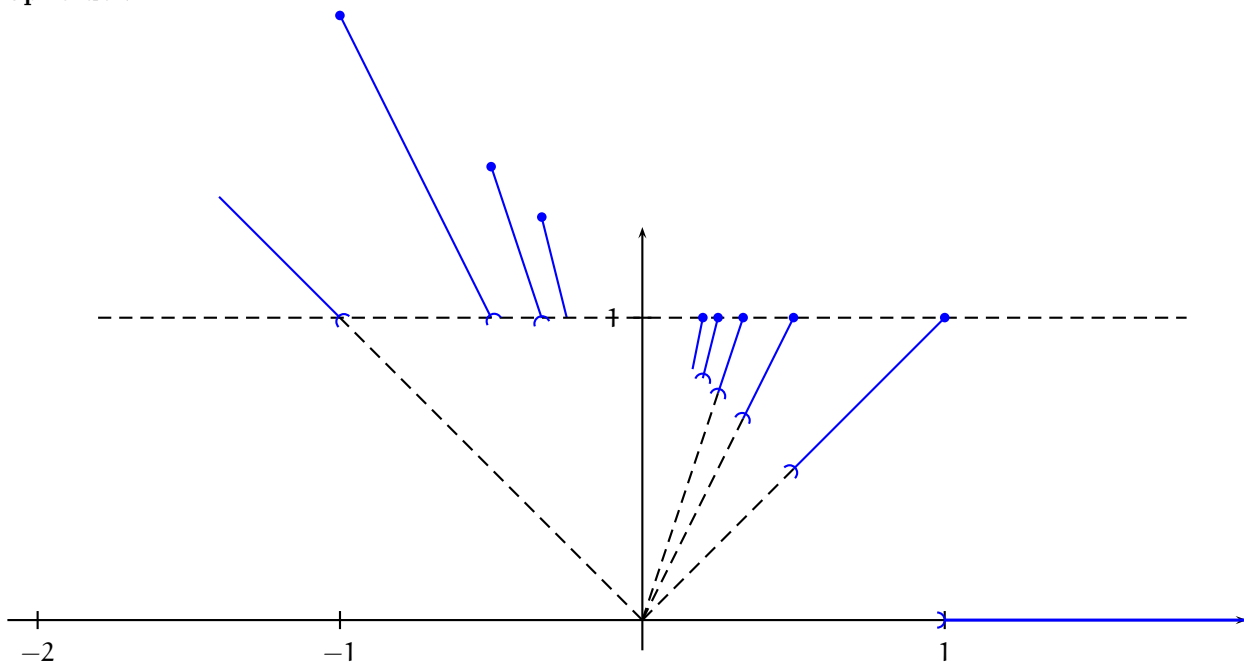
et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0.

f est affine sur chaque intervalle de la forme $\left] \frac{1}{p+1}, \frac{1}{p} \right]$ pour p élément de $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ et donc est continue sur ces intervalles et en particulier continue à gauche en chaque $\frac{1}{p}$. f est affine sur $] -\infty, -1]$ et aussi sur $]1, +\infty[$ et est donc continue sur ces intervalles. Il reste donc à analyser la continuité à droite en $\frac{1}{p}$, pour p entier relatif non nul donné. Mais,

$$f\left(\frac{1}{p}^+\right) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{p} \\ x > \frac{1}{p}}} (x(p-1)) = 1 - \frac{1}{p} \neq 1 = f\left(\frac{1}{p}\right).$$

f est donc discontinue à droite en tout $\frac{1}{p}$ où p est un entier relatif non nul donné.

Graphes de f :



n° 9 : Soit $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\} \\ 1 - x & \text{si } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \\ 0 & \text{si } x = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ si } x = 0 \end{cases}$. f est bien une application définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$.

De plus,

- si $x \in (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, alors $f(f(x)) = f(x) = x$.
- si $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$, alors $1 - x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ et donc $f(f(x)) = f(1 - x) = 1 - (1 - x) = x$.
- et enfin, $f(f(0)) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f(0) = \frac{1}{2}$.

Finalement, $f \circ f = \text{Id}_{[0,1]}$ et f étant une involution de $[0, 1]$, f est une permutation de $[0, 1]$.

Soit a un réel de $[0, 1]$. On note que $\lim_{x \rightarrow a, x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} f(x) = 1 - a$ et $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}} f(x) = a$. Donc, si f a une limite en a ,

nécessairement $1 - a = a$ et donc $a = \frac{1}{2}$. Mais, si $a = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow a, x \in \mathbb{Q}, x \neq a} f(x) = a = \frac{1}{2} \neq 0 = f(\frac{1}{2})$ et donc f est discontinue en tout point de $[0, 1]$.

n° 10 : Soit T une période strictement positive de f . On note ℓ la limite de f en $+\infty$. Soit x un réel. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x + nT)$ et quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x + nT) = \ell.$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$ et donc, f est constante sur \mathbb{R} .