

Planche n° 23. Continuité. Corrigé

n° 1 : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z \in A$. $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$. Or, $|x - z| \geq d(x, A)$ et donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall z \in A, d(x, A) - |x - y| \leq |y - z|.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. D'après ce qui précède, $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant de $\{|y - z|, z \in A\}$ et comme $d(y, A)$ est le plus grand des minorants de cet ensemble, on en déduit que $d(x, A) - |x - y| \leq d(y, A)$. On a montré que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(x, A) - d(y, A) \leq |y - x|.$$

En échangeant les rôles de x et y , on a aussi montré que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, d(y, A) - d(x, A) \leq |y - x|$ et finalement,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|.$$

Ainsi, f est 1-Lipschitzienne et en particulier continue sur \mathbb{R} .

n° 2 : Pour $x \in [a, b]$, posons $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[a, b]$ puisque f l'est. De plus, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[a, b]$ ou encore, l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

n° 3 : Puisque $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\ell \in [0, 1[$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{\ell + 1}{2} < 1$. Mais alors, $f(A) < A$ et $f(0) \geq 0$ ou encore f est continue sur $[0, A]$ et $f([0, A]) \subset [0, A]$ ce qui ramène à la situation de l'exercice précédent. L'équation $f(x) = x$ admet une solution dans $[0, A]$ et donc dans $[0, +\infty[$.

n° 4 : On note tout d'abord que puisque f est croissante sur $[a, b]$, f admet en tout point de $]a, b[$ une limite à gauche réelle et une limite à droite réelle et de même f admet en a une limite à droite réelle et admet en b une limite à gauche réelle.

Soit $E = \{x \in [a, b] / f(x) \geq x\}$. E est une partie non vide de \mathbb{R} (car a est dans E) et majorée (par b). Donc, E admet une borne supérieure c vérifiant $a \leq c \leq b$.

Montrons que $f(c) = c$.

• Si $c = b$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E / b - \frac{1}{n} < x_n \leq b$. Puisque f est à valeurs dans $[a, b]$ et que les x_n sont dans E , pour tout entier naturel non nul n , on a

$$x_n \leq f(x_n) \leq b (*).$$

Quand n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) tend vers b (théorème des gendarmes) et donc, f étant croissante sur $[a, b]$, la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(b^-) \leq f(b)$. Par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans $(*)$, on obtient alors $b \leq f(b^-) \leq f(b) \leq b$ et donc $f(b) = b$. Finalement, dans ce cas, b est un point fixe de f .

• Si $c \in [a, b[$, par définition de c , pour x dans $]c, b]$, $f(x) < x$ (car x n'est pas dans E) et par passage à la limite quand x tend vers c par valeurs supérieures et d'après les propriétés usuelles des fonctions croissantes, on obtient : $f(c) \leq f(c+) \leq c$. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in E / c - \frac{1}{n} < x_n \leq c$. x_n étant dans E , on a $f(x_n) \geq x_n$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $f(c) \geq f(c^-) \geq c$. Finalement, $f(c) = c$ et dans tous les cas, f admet au moins un point fixe.

n° 5 : Puisque f est croissante sur $[a, b]$, on sait que f admet en tout point x_0 de $]a, b[$ une limite à gauche et une limite à droite réelles vérifiant $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$ puis une limite à droite en a élément de $[f(a), +\infty[$ et une limite à gauche en b élément de $] - \infty, f(b)]$.

Si f est discontinue en un x_0 de $]a, b[$, alors on a $f(x_0^-) < f(x_0)$ ou $f(x_0) < f(x_0^+)$. Mais, si par exemple $f(x_0^-) < f(x_0)$ alors, $\forall x \in [a, x_0[$ ($\neq \emptyset$), $f(x) \leq f(x_0^-)$ et $\forall x \in [x_0, b]$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Donc $]f(x_0^-), f(x_0)[\cap f([a, b]) = \emptyset$ ce qui est exclu puisque d'autre part $]f(x_0^-), f(x_0)[\neq \emptyset$ et $]f(x_0^-), f(x_0)[\subset [f(a), f(b)]$ (la démarche est identique si $f(x_0^+) > f(x_0)$). Donc, f est continue sur $]a, b[$. Par une démarche analogue, f est aussi continue en a ou b et donc sur $[a, b]$.

n° 6 : Soit $x > 0$. Pour tout naturel n , $f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{1/4}) = \dots = f(x^{1/2^n})$. Or, à x fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1/2^n} = 1$ et, f étant continue en 1, on a :

$$\forall x > 0, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1).$$

f est donc constante sur $]0, +\infty[$, puis sur $[0, +\infty[$ par continuité de f en 0.

Pour $x \geq 0$, posons $f(x) = 0$ si $x \neq 1$ et $f(x) = 1$ si $x = 1$. Pour $x \geq 0$, on a $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. f vérifie donc : $\forall x \geq 0, f(x^2) = f(x)$, mais f n'est pas constante sur \mathbb{R}^+ .

n° 7 : Posons $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists A > 0 / \forall x \in \mathbb{R}^+, \left(x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Soit $(x, y) \in [A, +\infty]^2$. Alors, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} (< \varepsilon)$. D'autre part, f est continue sur le segment $[0, A]$ et donc est uniformément continue sur ce segment d'après le théorème de HEINE. Donc,

$$\exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, A]^2, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} (< \varepsilon).$$

Résumons. $\alpha > 0$ étant ainsi fourni, soient x et y deux réels de $[0, +\infty[$ vérifiant $|x - y| < \alpha$.

- Si $(x, y) \in [0, A]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
- Si $(x, y) \in [A, +\infty]^2$, on a $|f(x) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
- Si enfin on a $x \leq A \leq y$, alors, puisque $|A - x| \leq |x - y| < \alpha$, on a $|f(x) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et puisque A et y sont dans $[A, +\infty[$, on a $|f(y) - f(A)| < \frac{2\varepsilon}{3}$. Mais alors,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(y) - f(A)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in [0, +\infty]^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$. f est donc uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

n° 8 : Soit f un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, c'est-à-dire que f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

On sait déjà $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ et donc $f(0) = 0$. Puis, pour x réel donné, $f(-x) + f(x) = f(-x + x) = f(0) = 0$ et donc, pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$ (f est donc impaire). On a aussi $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$. De ce qui précède, on déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x).$$

Soit $a = f(1)$. D'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(n \times 1) = nf(1) = an$.

Puis, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $nf\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(n \times \frac{1}{n}\right) = f(1) = a$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, f\left(\frac{1}{n}\right) = a \frac{1}{n}$.

Puis, pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = pa \frac{1}{q} = a \frac{p}{q}$.

Finalement,

$$\forall r \in \mathbb{Q}, f(r) = ar.$$

Maintenant, si l'on n'a pas l'hypothèse de continuité, on ne peut aller plus loin. Supposons de plus que f soit continue sur \mathbb{R} .

Soit x un réel. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels, convergente de limite x . f étant continue en x , on a :

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} ar_n = ax.$$

Donc, si f est un morphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même, f est une application linéaire de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Réciproquement, les applications linéaires conviennent.

n° 9 : Soit T une période strictement positive de f . f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc est bornée sur ce segment. f est par suite bornée sur \mathbb{R} par T -périodicité.

Soit $\varepsilon > 0$.

f est continue sur le segment $[0, T]$ et donc, d'après le théorème de HEINE, f est uniformément continue sur ce segment. Par suite,

$$\exists \alpha \in]0, T[\forall (x, y) \in [0, T]^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Soient x et y deux réels tels que $|x - y| < \alpha$. Si il existe un entier naturel k tel que $(x, y) \in [kT, (k+1)T]$, alors $x - kT \in [0, T]$, $y - kT \in [0, T]$, puis $|(x - kT) - (y - kT)| = |y - x| < \alpha$ et donc $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Sinon, en supposant par exemple que $x \leq y$, puisque l'on a choisi $\alpha < T$,

$$\exists k \in \mathbb{Z} / (k - 1)T \leq x \leq kT \leq y \leq (k + 1)T.$$

Mais alors, $|x - kT| \leq |y - x| < \alpha$ et $|y - kT| \leq |y - x| < \alpha$. Par suite,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(kT)| + |f(y) - f(kT)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans tous les cas, si $|x - y| < \alpha$, alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

f est donc uniformément continue sur \mathbb{R} .

n° 10 : Si f est strictement monotone sur I , f est injective.

Réciproquement, supposons f injective et continue sur I et montrons que f est strictement monotone.

Supposons par l'absurde que f n'est pas strictement monotone. On peut alors trouver trois réels a , b et c dans l'intervalle I tels que

$$a < b < c \text{ et } ((f(b) \geq f(a) \text{ et } f(b) \geq f(c)) \text{ ou } (f(b) \leq f(a) \text{ et } f(b) \leq f(c))).$$

Quitte à remplacer f par $-f$, on supposera que $a < b < c$ et $f(b) \geq f(a)$ et $f(b) \geq f(c)$.

Puisque f est injective, on a même $a < b < c$ et $f(b) > f(a)$ et $f(b) > f(c)$. Soit $M = \text{Max}\{f(a), f(c)\}$. On a $M < f(b)$. M est élément de $[f(a), f(b)]$ et, puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = M$. De plus, on ne peut avoir $\alpha = b$ car $f(\alpha) = M \neq f(b)$ (et f injective). Donc,

$$\exists \alpha \in [a, b[/ f(\alpha) = M.$$

De même, puisque M est élément de $[f(c), f(b)]$, $\exists \beta \in]b, c[/ f(\beta) = M$. Ainsi, on a trouvé dans I deux réels α et β vérifiant $\alpha \neq \beta$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ ce qui contredit l'injectivité de f .

Donc, f est strictement monotone sur I .

n° 11 : Soit f la fonction caractéristique de \mathbb{Q} . Le groupe des périodes de f est \mathbb{Q} . En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, x + r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, f(x + r) = f(x)$. Mais on a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), x + r \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Q},$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), f(x + r) \neq f(x)$.

n° 12 : On a $0 \leq f(0) \leq 1$ et $0 \leq f(1) \leq 1$. Donc $|f(1) - f(0)| \leq 1$. Mais, par hypothèse, $|f(1) - f(0)| \geq 1$. Par suite, $|f(1) - f(0)| = 1$ et nécessairement, $(f(0), f(1)) \in \{(0, 1), (1, 0)\}$.

Supposons que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ et montrons que $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$.

Soit $x \in [0, 1]$. On a $|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|$ ce qui fournit $f(x) \geq x$. On a aussi $|f(x) - f(1)| \geq |x - 1|$ ce qui fournit $1 - f(x) \geq 1 - x$ et donc $f(x) \leq x$. Finalement, $\forall x \in [0, 1], f(x) = x$ et donc $f = \text{Id}_{[0,1]}$.

Si $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$, posons pour $x \in [0, 1], g(x) = 1 - f(x)$. Alors, $g(0) = 0, g(1) = 1$ puis, pour $x \in [0, 1], g(x) \in [0, 1]$. Enfin,

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |g(y) - g(x)| = |f(y) - f(x)| \geq |y - x|.$$

D'après l'étude du premier cas, $g = \text{Id}_{[0,1]}$ et donc $f = 1 - \text{Id}_{[0,1]}$. Réciproquement, $\text{Id}_{[0,1]}$ et $1 - \text{Id}_{[0,1]}$ sont bien solutions du problème.

n° 13 : $\text{Id}_{[0,1]}$ est solution.

Réciproquement, soit f une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même vérifiant $\forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x$. Nécessairement, $\forall x \in [0, 1], 0 \leq 2x - f(x) \leq 1$ et donc $\forall x \in [0, 1], 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x$.

Soit f^{-1} la réciproque de f .

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], f(2x - f(x)) = x &\Leftrightarrow \forall x \in [0, 1], 2x - f(x) = f^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0 \text{ (car } \forall x \in [0, 1], \exists ! y \in [0, 1] / x = f(y)\text{)}. \end{aligned}$$

Soient $y \in [0, 1]$ puis $u_0 = y$. En posant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on définit une suite de réels de $[0, 1]$ (car $[0, 1]$ est stable par f). La condition $\forall y \in [0, 1], f(f(y)) - 2f(y) + y = 0$ fournit $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante ou encore u est arithmétique. Mais, u est également bornée et donc u est constante.

En particulier, $u_1 = u_0$ ce qui fournit $f(y) = y$. On a montré que $\forall y \in [0, 1], f(y) = y$ et donc $f = \text{Id}_{[0,1]}$.

n° 14 : 1) Soit n un entier naturel non nul donné. Pour x élément de $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, posons $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

g est définie et continue sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Maintenant, s'il existe un entier k élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$, on a trouvé un réel x de $[0, 1]$ tel que $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ (à savoir $x = \frac{k}{n}$).

Sinon, tous les $g\left(\frac{k}{n}\right)$ sont non nuls et, étant de somme nulle, il existe deux valeurs de la variable en lesquels g prend des valeurs de signes contraires. Puisque g est continue sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que g s'annule au moins une fois dans cet intervalle ce qui fournit de nouveau une solution à l'équation $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

2) Soit $a \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}^*$. Soit, pour $x \in [0, 1], f(x) = \left|\sin \frac{\pi x}{a}\right| - x \left|\sin \frac{\pi}{a}\right|$. f est continue sur $[0, 1], f(0) = f(1) = 0$ mais,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+a) - f(x) = \left(\left|\sin \frac{\pi(x+a)}{a}\right| - \left|\sin \frac{\pi x}{a}\right|\right) - ((x+a) - x) \left|\sin \frac{\pi}{a}\right| = -a \left|\sin \frac{\pi}{a}\right| \neq 0.$$

3)a) et b). Soit $g(t)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par le cycliste à l'instant t exprimé en heures, $0 \leq t \leq 1$, puis, pour $t \in [0, 1], f(t) = g(t) - 20t$. f est continue sur $[0, 1]$ (si le cycliste reste un tant soit peu cohérent) et vérifie $f(0) = f(1) = 0$.

D'après 1), $\exists t_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \exists t_2 \in \left[0, \frac{19}{20}\right]$ tels que $f\left(t_1 + \frac{1}{2}\right) = f(t_1)$ et $f\left(t_2 + \frac{1}{20}\right) = f(t_2)$ ce qui s'écrit encore $g\left(t_1 + \frac{1}{2}\right) - g(t_1) = 10$ et $g\left(t_2 + \frac{1}{20}\right) - g(t_2) = 1$.

c) Posons pour $0 \leq t \leq 1, f(t) = \left|\sin \frac{4\pi t}{3}\right| - \frac{t\sqrt{3}}{2}$ et donc, $g(t) = \left|\sin \frac{4\pi t}{3}\right| + (20 - \frac{\sqrt{3}}{2})t$. $\forall t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], f\left(t + \frac{3}{4}\right) - f(t) \neq 0$ ou encore $g\left(t + \frac{3}{4}\right) - g(t) \neq 15$.