Planche n° 24. Dérivation

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (***) Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x),\ x \in [a,b]\}$. Montrer que f est affine.

n° 2 : (***) (Formule de Taylor-Lagrange)
Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et n un entier naturel. Soit f une fonction élément de $C^n([a,b],\mathbb{R}) \cap D^{n+1}(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où A est intelligemment choisi.

n° 3 : (***) (Formule des trapèzes)
Soit $f \in C^2([a,b],\mathbb{R}) \cap D^3(]a,b[,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a)+f'(b)) - \frac{f^{(3)}(c)(b-a)^3}{12}.$$

Indication. Appliquer le théorème de Rolle à g' puis g où $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(x)+f'(a)) - A(x-a)^3$ où A est intelligemment choisi.

Que devient cette formule si on remplace f par F une primitive d'une fonction f de classe C^1 sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$? Interprétez géométriquement.

n° 4 : (**) Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur I et même dérivable à droite et à gauche en tout point de I.

n° 5 : (*I)** (Inégalités de convexité)

1) Soient x_1, x_2,..., x_n, n réels positifs ou nuls et α_1,..., α_n, n réels strictement positifs tels que $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$. Montrer que $x_1^{\alpha_1}..x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$. En déduire que $\sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \dfrac{x_1 + ... + x_n}{n}$.

2) Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

a) Montrer que, pour tous réels a et b positifs ou nuls, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ avec égalité si et seulement si $a^p = b^q$.

b) Soient a_1,..., a_n et b_1,..., b_n, $2n$ nombres complexes. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{1/q} \text{ (Inégalité de Hölder).}$$

c) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est convexe et retrouver ainsi l'inégalité de Hölder.

d) Trouver une démonstration directe et simple dans le cas $p = q = 2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

n° 6 : (*I)** (Polynômes de Legendre)

Pour n entier naturel non nul donné, on pose $L_n = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1) Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

2) En étudiant le polynôme $A_n = (X^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles simples et toutes dans $]-1;1[$.

n° 7 : (**) Déterminer dans chacun des cas suivants la dérivée n-ème de la fonction proposée :

$$\textbf{1)}\ x \mapsto x^{n-1}\ln(1+x)\ \textbf{2)}\ x \mapsto \cos^3 x \sin(2x)\ \textbf{3)}\ x \mapsto \frac{x^2+1}{(x-1)^3}\ \textbf{4)}\ x \mapsto (x^3+2x-7)e^x.$$

n° 8 : (*I)** Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

n° 9 : (**) Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a : $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$.

n° 10 : (**) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = f(a) = f'(0) = 0$ pour un certain a non nul. Montrer qu'il existe un point distinct de O de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par l'origine.

n° 11 : (****) (Toute fonction dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires)
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soient a et b deux points distincts de I vérifiant $f'(a) < f'(b)$ et soit enfin un réel m tel que $f'(a) < m < f'(b)$.

1) Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < m < \dfrac{f(b+h)-f(b)}{h}$.

2) Montrer qu'il existe y dans $[a,b]$ tel que $m = \dfrac{f(y+h)-f(y)}{h}$ puis qu'il exsite x tel que $f'(x) = m$.

n° 12 : (****) Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) \leq (f(x))^2$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \leq (f'(x))^2$ (Indication. Appliquer la formule de TAYLOR-LAPLACE entre x et $x+y$ puis entre x et $x-y$).

n° 13 : (*IT) Etudier la dérivabilité à droite en 0 de la fonction $f\ :\ x \mapsto \cos\sqrt{x}$.

n° 14 : (**) Soit P un polynôme réel de degré supèrieur ou égal à 2.

1) Montrer que si P n'a que des racines simples et réelles, il en est de même de P'.

2) Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

n° 15 : (**) (Généralisation du théorème des accroissements finis)
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.
Soit $\Delta\ :\ \begin{array}{ccc} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$.

1) Montrer que Δ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et calculer sa dérivée.

2) En déduire qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que $(g(b)-g(a))f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c)$.

n° 16 : (**) Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

n° 17 : (***) Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f\circ f(x) = \dfrac{x}{2}+3$. En remarquant que $f\left(\dfrac{x}{2}+3\right) = \dfrac{f(x)}{2}+3$, montrer que f' est constante puis déterminer f.

n° 18 : (*I)** Soit f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. (Indication. Considérer $g(x) = e^x f(x)$).

n° 19 : (*IT)** Etudier la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1) $u_0 \geq -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$, **2)** $u_0 > -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$
3) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin u_n$, **4)** $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$,
5) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(2u_n)$, **6)** $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$.

