Planche n° 26. Etudes de fonctions. Corrigé

1) f_1 est définie et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux. De plus, f_1 est paire. On étudiera f_1 sur $[0,+\infty[$ (se méfier alors pour la dérivabilité en 0).

• **Etude en 0** (à gauche et à droite).

$$\begin{aligned}
f_1(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^3}(1+x^2)\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)-x(1-x^2+x^4+o(x^4))\right]\\
&= \frac{1}{x^3}(1+x^2)\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{4x^5}{5}+o(x^5)\right) = (1+x^2)\left(\frac{2}{3}-\frac{4x^2}{5}+o(x^2)\right)\\
&= \frac{2}{3}-\frac{2x^2}{15}+o(x^2).
\end{aligned}$$

Par suite, f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0)=\dfrac{2}{3}$. Puisque f_1 admet en 0 un développement limité d'ordre 1, le prolongement encore noté f_1 est dérivable en 0 et $f_1'(0)=0$. $\mathscr{C}_1$ admet ainsi au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à $(0x)$ d'équation $y=\dfrac{2}{3}$. Enfin, puisque $f(x)-\dfrac{2}{3}$ est, au voisinage de 0, du signe de $-\dfrac{2x^2}{15}$, la courbe est localement en dessous de sa tangente.

• **Etude en** $+\infty$ (et $-\infty$). $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, et de même $f_1(x) \underset{x\to-\infty}{\to} 0$.

• **Dérivée, variations.** Pour $x>0$,

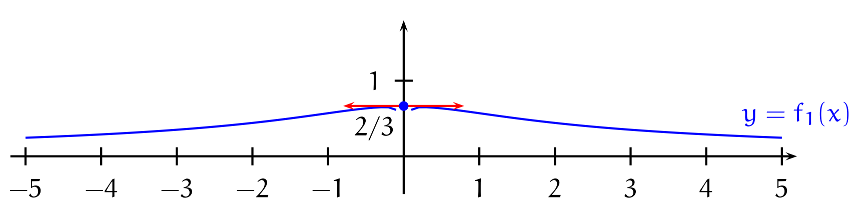
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(-\frac{3}{x^4}-\frac{1}{x^2}\right)\left(\operatorname{Arctan} x-\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{1+x^2}{x^3}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right)\\
&= -\frac{3+x^2}{x^4}\left(\operatorname{Arctan} x-\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{1+x^2}{x^3}\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}\\
&= \frac{3+x^2}{x^4}\left(-\operatorname{Arctan} x+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^4}{3+x^2}\frac{2}{x(1+x^2)}\right)\\
&= \frac{3+x^2}{x^4}\left(-\operatorname{Arctan} x+\frac{x(3+x^2)+2x^3}{(1+x^2)(3+x^2))}\right) = \frac{3+x^2}{x^4}g(x)
\end{aligned}$$

où, pour tout réel x, $g(x) = -\operatorname{Arctan} x+\dfrac{3x}{3+x^2}$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour x réel,

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}+3\frac{(3+x^2)-2x^2}{(3+x^2)^2} = \frac{-(3+x^2)^2+3(3-x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)(3+x^2)^2} = \frac{-4x^4}{(3+x^2)^2(1+x^2)}.$$

g' est donc strictement négative sur $]0,+\infty[$ et par suite, g est donc strictement décroisante sur $[0,+\infty[$. Puisque $g(0)=0$, pour $x>0$, $g(x)<0$. Finalement, f_1' est strictement négative sur $]0,+\infty[$ et f_1 est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

• **Graphe.**



2) f_2 est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, paire et 2π-périodique. f_2 est continue sur D en vertu de théorèmes généraux. On étudie f_2 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$.

• **Etude en $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$.** $f(x) \underset{x \to \pi/2}{\sim} |\tan x|$ et donc, $\lim\limits_{x \to \pi/2} f(x) = +\infty$. $\mathscr{C}_2$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$ pour droite asymptote.

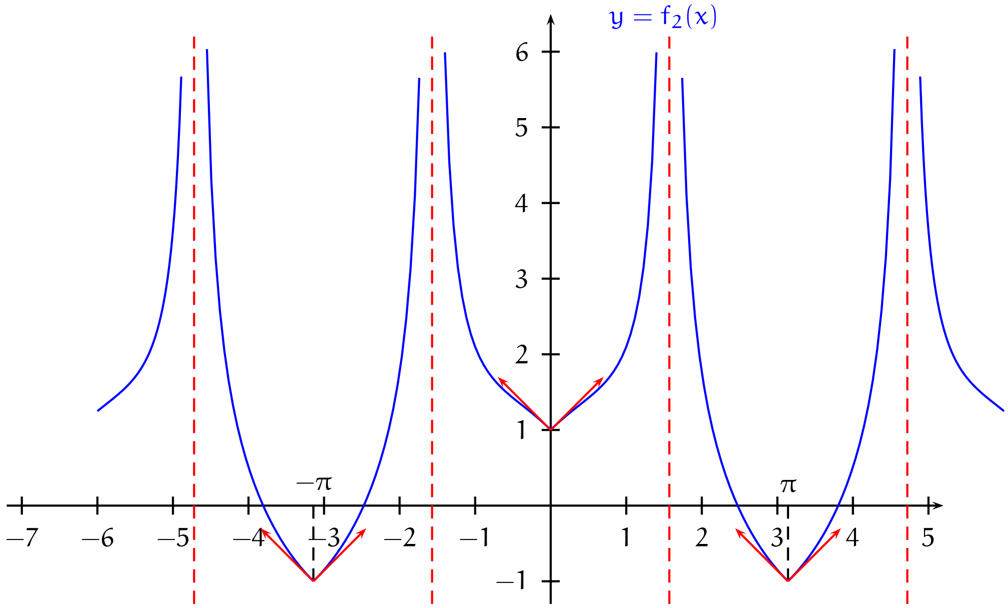
• **Dérivabilité et dérivée.**
f_2 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \notin \dfrac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, $f_2'(x) = \varepsilon\dfrac{1}{\cos^2 x} - \sin x$ où ε est le signe de $\tan x$.

f_2 est aussi dérivable à droite en 0 et $(f_2)'_d(0) = 1$. Par symétrie, f_2 est dérivable à gauche en 0 et $(f_2)'_g(0) = -1$. f_2 n'est donc pas dérivable en 0.

De même, f_2 est dérivable à gauche et à droite en π avec $(f_2)'_g(\pi) = -1$ et $(f_2)'_d(\pi) = 1$, et n'est donc pas dérivable en π.

• **Variations**.
f_2 est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$. Puis, pour x élément de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $f_2'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \sin x > 1 - 1 = 0$. f_2' est strictement positive sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et donc f_2 est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• **Graphe.**



3) • **Ensemble de définition de f_3.** Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + 12x^2 + 60x + 120$. Pour tout réel x, on a $P'(x) = 3(x^2 + 8x + 20) = 3((x+4)^2 + 4) > 0$. P est une fonction polynôme de degré 3 strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule donc une et une seule fois en un certain réel noté α. De plus, $P(-5)P(-4) < 0$ et $\alpha \in]-5, -4[$.
Enfin, P est strictement négatif sur $]-\infty, \alpha[$ et strictement positif sur $]\alpha, +\infty[$.

f_3 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$, et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3(x) = x - \ln\left|\frac{P(x)}{P(-x)}\right| = x - \ln|P(x)| + \ln|P(-x)|.$$

Notons que f_3 est impaire.

• **Dérivabilité et dérivée.**
f_3 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\alpha, \alpha\}$,

$$f_3'(x) = 1 - \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{P'(-x)}{P(-x)} = \frac{P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)}{P(-x)P(x)}.$$

Puis,

$$\begin{aligned}
&P(x)P(-x) - P'(x)P(-x) - P'(-x)P(x)\\
&\qquad = ((12x^2+120)+(x^3+60x))((12x^2+120)-(x^3+60x))\\
&\qquad - 3((x^2+20)+8x)((12x^2+120)-(x^3+60x))) - 3((x^2+20)-8x))((12x^2+120)+(x^3+60x))\\
&\qquad = 144(x^2+10)^2 - x^2(x^2+60)^2 - 6((x^2+20)(12x^2+120)-(8x)(x^3+60x))\\
&\qquad = (-x^6+24x^4-720x^2+14400) - 6(4x^4-120x^2+2400) = -x^6,
\end{aligned}$$

et donc $f_3'(x) = \dfrac{-x^6}{P(x)P(-x)}$.

• **Etude en** $+\infty$.

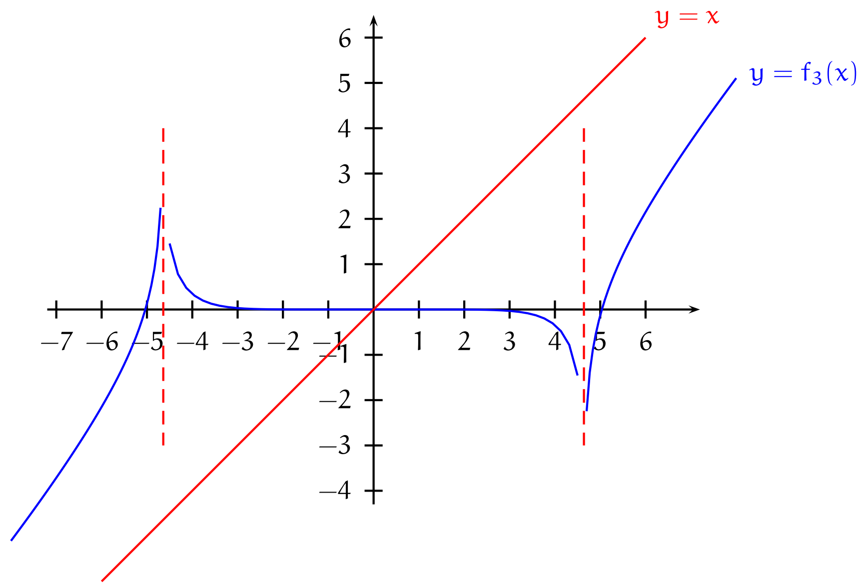
$$f_3(x) - x \underset{x\to+\infty}{=} -\ln\left(1+\frac{12}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \ln\left(1-\frac{12}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{24}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

On en déduit tout d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$), puis que $\mathscr{C}_3$ admet en $+\infty$ (resp.$-\infty$) la droite d'équation $y = x$ pour droite asymptote et que $\mathscr{C}_3$ est au-dessous (resp. au-dessus) de cette droite au voisinage de $+\infty$ (resp.$-\infty$).

• **Variations.**
D'une part, $f_3'(0) = 0$. D'autre part, pour $x > 0$, $P(x) > 0$. f_3' est donc du signe de $-P(-x)$ sur $]0,+\infty[\setminus\{-\alpha\}$. Ainsi, f_3' est strictement négative sur $]0,-\alpha[$ et strictement positive sur $]-\alpha,+\infty[$.
On en déduit le tableau de variations de f_3.

x	0		α		$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_3	0 $\searrow$		$-\infty$ $\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

• **Graphe.**



4) • **Définition et symétries.** f_4 est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}e^{\frac{2/x}{1/x^2-1}} = \frac{1}{x}e^{-\frac{2x}{x^2-1}} = \frac{1}{f_4(x)}.$$

Cette constatation peut servir à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x)$ si l'on connait $\lim\limits_{x\to0,\ x>0} f_4(x)$, obtenir les variations de f_4 sur $]0,1[$ si on les connait sur $]1,+\infty[$ ...

On peut aussi noter que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_4(-x)f_4(x) = -x^2$ et donc, pour $x \neq 0$, $f_4(-x) = \dfrac{-x^2}{f_4(x)}$. Cette constatation pourra être utile pour déduire l'étude de f_4 en -1 de l'étude en 1.

• **Etude en $+\infty$ et $-\infty$.**

Puisque $\dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{\to} 0$, on a $f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$ ce qui montre déjà que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_4(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_4(x) = -\infty$ et que $\mathscr{C}_4$ admet en $+\infty$ et $-\infty$, une direction asymptotique d'équation $y = x$. Plus précisément,

$$\frac{2x}{x^2-1} \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{2}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-1} = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

puis,

$$e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to\pm\infty}{=} 1 + \left(\frac{2}{x}\right) + \left(\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On en déduit que

$$f_4(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} x + 2 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par suite, $\mathscr{C}_4$ admet la droite d'équation $y = x+2$ pour droite asymptote en $+\infty$ et $-\infty$. De plus, le signe de $f_4(x)-(x+2)$ étant localement le signe de $\dfrac{2}{x}$, $\mathscr{C}_4$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$ et au-dessous au voisinage de $-\infty$.

• **Dérivée. Variations.**
f_4 est de classe C^1 sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f_4'(x)}{f_4(x)} &= (\ln|f_4|)'(x) = \left(\ln|x| + \frac{2x}{x^2-1}\right)'(x) = \frac{1}{x} + 2\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}\\ &= \frac{(x^2-1)^2 - 2x(x^2+1)}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{x(x^2-1)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$\forall x \neq 0,\ f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}},$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$ par continuité de f_4' en 0.

f_4' est donc du signe de $P(x) = x^4-2x^3-2x^2-2x+1$. Or, pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}P(x) &= x^2\left(\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 2\right) = x^2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 4\right)\\ &= x^2\left(x+\frac{1}{x}-(1-\sqrt{5})\right)\left(x+\frac{1}{x}-(1+\sqrt{5})\right) = (x^2-(1-\sqrt{5})x+1)(x^2-(1+\sqrt{5})x+1),\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $x = 0$.
Le premier trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}-1)^2-4 = 2-2\sqrt{5} < 0$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2-(1-\sqrt{5})x+1 > 0$.
Le deuxième trinôme a un discriminant égal à $(\sqrt{5}+1)^2-4 = 2+2\sqrt{5} > 0$ et admet donc deux racines réelles $\alpha = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2+\sqrt{5}}) = 2,89... > 1$ et $\beta = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}-\sqrt{2+2\sqrt{5}}) = \dfrac{1}{\alpha} = 0,34... \in]0,1[$.
On en déduit le tableau de variation de f_4 donné plus loin.

•**Etude en 1 (et -1).**
On a déjà $\lim\limits_{x\to1,\ x>1} f_4(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1,\ x>-1} f_4(x) = -\infty$. Ensuite, $\lim\limits_{x\to1,\ x<1} f_4(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-1,\ x<-1} f_4(x) = 0$.
On prolonge f_4 par continuité à gauche en 1 en posant $f_4(1) = 0$, et de même en -1 et on étudie la dérivabilité du prolongement encore noté f_4.

f_4 est continue sur $]-1,1]$, de classe C^1 sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ (voir dérivée-variations),

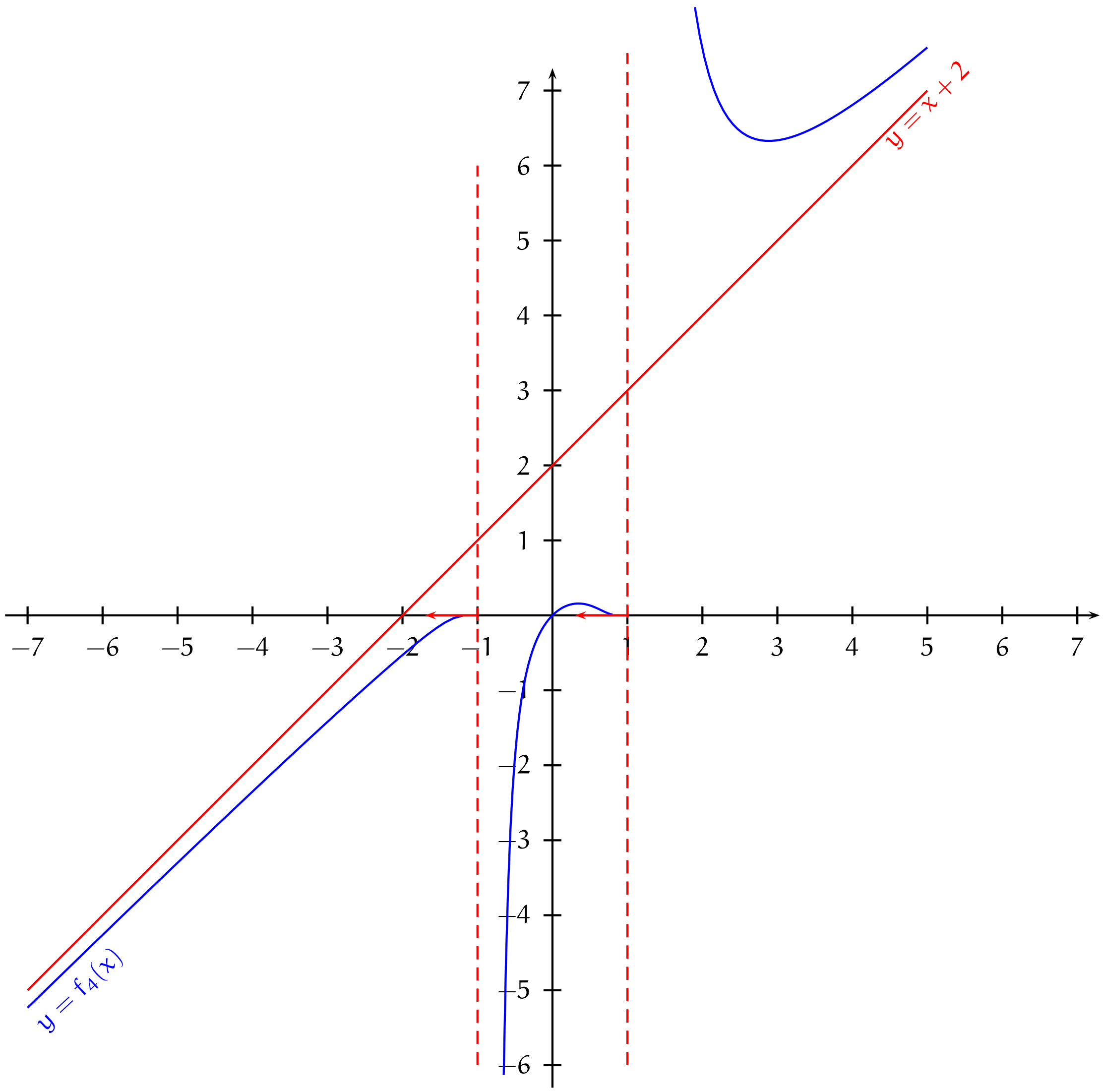
$$f_4'(x) = \frac{x^4-2x^3-2x^2-2x+1}{(x^2-1)^2}e^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to1,\ x<1}{\to} 0.$$

D'après un théorème classique d'analyse, f_4 est de classe C^1 sur $]-1,1]$ et en particulier dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 0$.
De même, f_4 est dérivable à gauche en -1 et $f'_g(-1) = 0$. $\mathscr{C}_4$ admet en ces points des demi-tangentes parallèles à l'axe (Ox).

• Tableau de variation de f_4.

x	$-\infty$		-1		0		β		1		α		$+\infty$
$f'_4(x)$		$+$	$\Vert$		$+$		0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_4	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \ \Vert \ -\infty$		$\nearrow$		$0,15\ldots$	$\searrow$	$0 \ \Vert \ +\infty$	$\searrow$	$6,34\ldots$	$\nearrow$	$+\infty$

Graphe.



5) • Ensemble de définition, symétries. Si $x > 0$, $e^x - 1 > 0$ et si $x < 0$, $e^x - 1 < 0$. Donc, pour $x \neq 0$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$ et f_5 est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x \neq 0$,

$$f_5(-x) = -\frac{1}{x}\ln\frac{e^{-x}-1}{-x} = -\frac{1}{x}\ln(e^{-x}) - \frac{1}{x}\ln\frac{e^x - 1}{x} = 1 - f(x).$$

Donc, pour tout réel non nul x, $f(x) + f(-x) = 1$. Le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_5$.

• **Etude en 0.**

$$f_5(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) = \frac{1}{x}\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{24}x+o(x).$$

Ainsi, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0)=\frac{1}{2}$. Le prolongement, encore noté f_5, admet en 0 un développement limité d'ordre 1 et est donc dérivable en 0 avec $f_5'(0)=\frac{1}{24}$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_5$ en le point d'abscisse 0 est $y=\frac{1}{24}x+\frac{1}{2}$. Par symétrie, ce point est un point d'inflexion.

• **Etude en** $+\infty$.

$$f_5(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x}\left(\ln(e^x)-\ln x+\ln(1-e^{-x})\right) = 1-\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln(1-e^{-x})}{x} = 1+o(1).$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_5(x)=1$. Par symétrie, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_5(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-f_5(-x))=1-\lim\limits_{X\to+\infty} f_5(X)=1-1=0$.

• **Dérivée. Variations.**

f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en vertu de théorèmes généraux (et donc sur $\mathbb{R}$) et pour $x\neq 0$, (puisque $\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\ln\left|\frac{e^x-1}{x}\right|=\ln|e^x-1|-\ln|x|$),

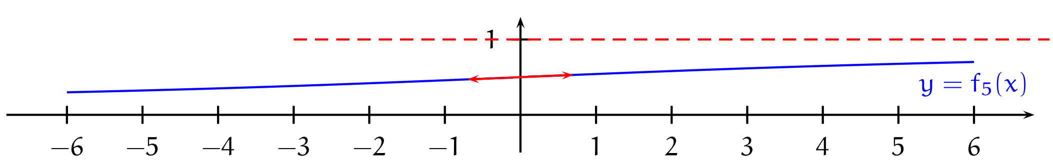
$$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{e^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\left(-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}-1\right).$$

f_5' est, sur $\mathbb{R}^*$, du signe de $g(x)=-\ln\frac{e^x-1}{x}+\frac{xe^x}{e^x-1}-1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour x réel non nul,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{1}{x}+\frac{(e^x+xe^x)(e^x-1)-xe^x\times e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-xe^x(e^x-1)+(e^x-1)^2+xe^x(e^x-1-x)}{x(e^x-1)^2}\\ &= \frac{(e^x-1)^2-x^2e^x}{x(e^x-1)^2} = \frac{(e^{x/2}-e^{-x/2})^2-x^2}{x(e^{x/2}-e^{-x/2})^2} = \frac{\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}\right)^2-x^2}{x\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}-\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

L'inégalité $\mathrm{sh}\,x>x$, valable pour $x>0$, est classique (par exemple, la formule de Taylor-Laplace à l'ordre 1 fournit pour $x>0$, $\mathrm{sh}\,x=x+\int_0^x (x-t)\,\mathrm{sh}\,t\;dt>x$.) Par suite, g' est strictement positive sur $]0,+\infty[$, et donc g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. En tenant compte de $g(0^+)=0$, g est donc strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5' et f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Par symétrie et continuité en 0, f_5 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

• **Graphe.**



6) f_6 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ en vertu de théorèmes généraux.

• **Etude en 1.**

$f_6(x)-f_6(1)=x-1+\sqrt{|x^2-1|}\underset{x\to1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{|x-1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en 1 mais que $\mathscr{C}_6$ admet au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).

• **Etude en -1.**

$f_6(x)-f_6(-1)=x+1+\sqrt{|x^2-1|}\underset{x\to-1}{\sim}\sqrt{2}\sqrt{|x+1|}$, ce qui montre que f_6 n'est pas dérivable en -1 mais que $\mathscr{C}_6$ admet au point d'abscisse -1 deux demi-tangentes parallèles à (Oy).

• **Etude en $+\infty$.**
Quand x tend vers $+\infty$, on a

$$f_6(x) = x + x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = x + x\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui montre tout à la fois que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$, que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à $\mathscr{C}_6$ en $+\infty$ et que $\mathscr{C}_6$ est au-dessous de cette droite au voisinage de $+\infty$.

• **Etude en $-\infty$.**
Au voisinage de $-\infty$, $f_6(x) = x - x\left(1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = o(1)$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_6(x) = 0$.

• **Dérivée. Variations.**
Soit ε le signe de $x^2 - 1$. Pour $x \neq \pm 1$,

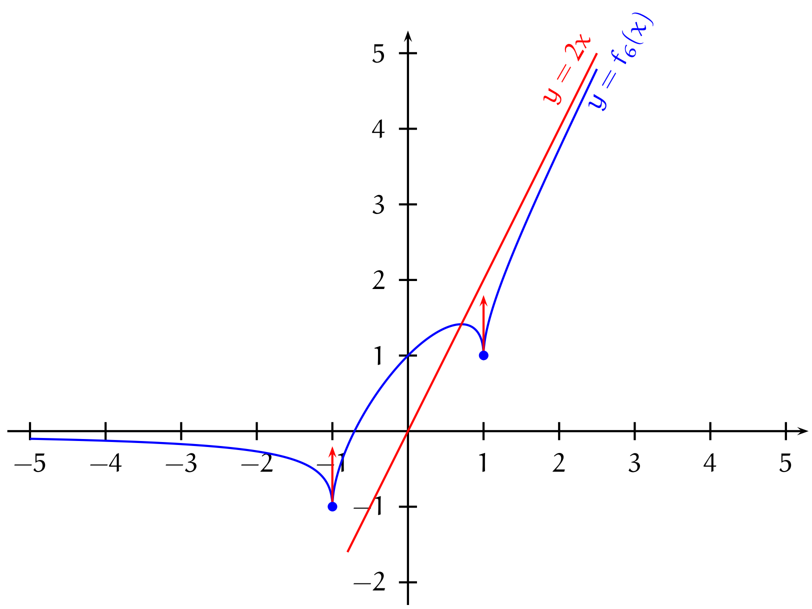
$$f_6'(x) = 1 + \frac{2\varepsilon x}{2\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}} = \frac{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)} + \varepsilon x}{\sqrt{\varepsilon(x^2-1)}}.$$

- Si $-1 < x \leq 0$, (de sorte que $\varepsilon x > 0$) ou $x > 1$, $f_6'(x) > 0$.
- Si $x < -1$, $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(x + \sqrt{x^2-1}) = \text{sgn}\left(\frac{1}{x - \sqrt{x^2-1}}\right) = -$ et $f_6'(x) < 0$.
- Si $0 \leq x < 1$. $\text{sgn}(f_6'(x)) = \text{sgn}(-x + \sqrt{-x^2+1}) = \text{sgn}((1-x^2) - x^2) = \text{sgn}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right)$.

On en déduit le tableau de variations de f_6 :

x	$-\infty$		-1		$1/\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$f_6'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f_6	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$-\infty$

• **Graphe.**



A partir d'ici, on ne donne que des indications ou des solutions abrégées.

7) • f_7 est définie sur $D =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

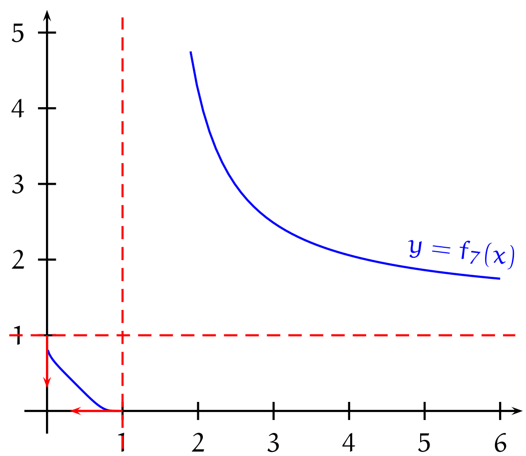
• $\forall x \in D,\ f_7\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{f_7(x)}$.

• f_7 est strictement décroissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (mais pas sur D).

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_7(x) = e$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f_7(x) = +\infty$.

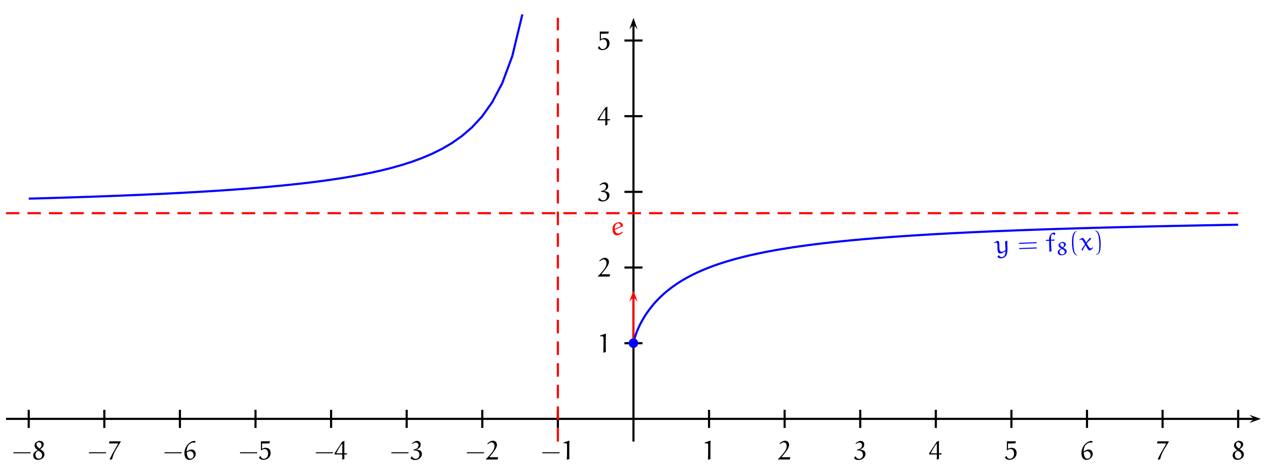
• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f_7(x) = 0$. On prolonge f_7 par continuité à gauche en 1 en posant $f_7(1) = 0$. Le prolongement est dérivable à gauche en 1 (étude de la limite du taux) et ${f_7}_g(1) = 0$.

• $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>0}} f_7(x) = 1$. On prolonge f_7 par continuité à droite en 1 en posant $f_7(0) = 1$. Le prolongement n'est pas dérivable à droite en 1 (étude de la limite du taux) mais $\mathscr{C}_7$ admet l'axe (Oy) pour tangente au point $(0,1)$.



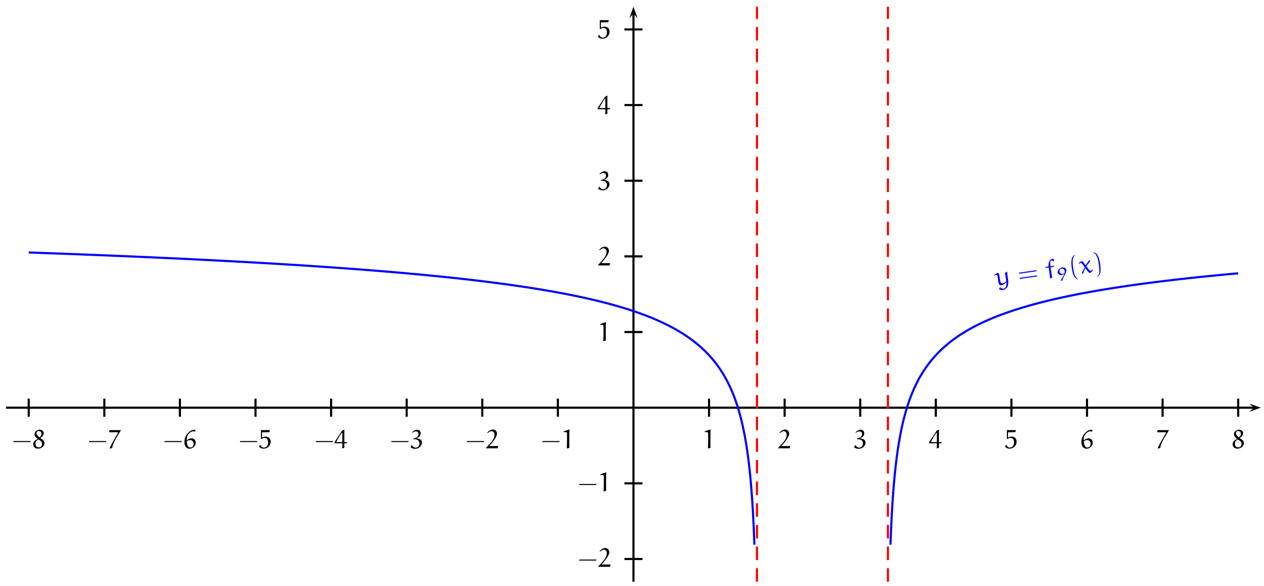
8) La seule difficulté est le domaine de définition.

Si $1 + \dfrac{1}{x} > 0$, **alors** $f_8(x)$ existe et donc $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\subset D_8$. Maintenant, entre -1 et 0, il existe encore des réels qui ont une image par f_8. Par exemple, $f_8\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-1/3} = -\sqrt[3]{2}$. Mais de tels réels sont trop isolés pour être tous étudiables. Pour une fois, on n'étudie donc pas sur l'ensemble de définition mais sur une partie de cet ensemble à savoir $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\subset D_8$.

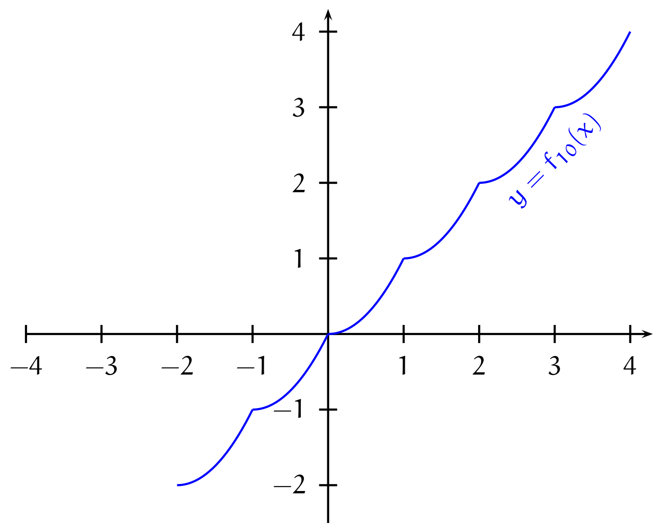


9) $f_9(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0$ et $1 - \dfrac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln(1/2)} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > \dfrac{1}{2}$. $D_{f_9} = \left]-\infty, \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right[$.

Pour tout réel x de D_{f_9}, $5 - x \in D_{f_9}$ et $f_9(5-x) = f_9(x)$. La droite d'équation $x = \dfrac{5}{2}$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}_9$.



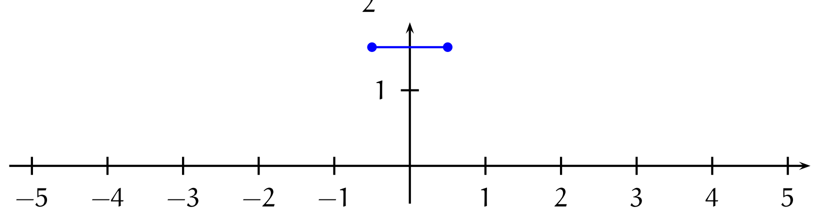
10) f_{10} est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Soit $p \in \mathbb{Z}$. Pour $x \in [p, p+1[$, $f(x) = (x-p)^2 + p$ et en particulier $f(p) = p$.



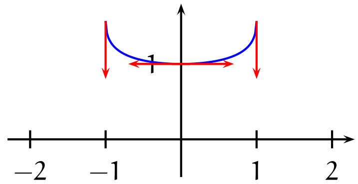
11) f_{11} est définie sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, paire.

Pour $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\sin(f_{11}(x)) = \sqrt{\frac{1}{2}-x}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+x\right)} + \sqrt{\frac{1}{2}+x}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-x\right)} = \left|\frac{1}{2}-x\right| + \left|\frac{1}{2}+x\right| = \frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}+x = 1$

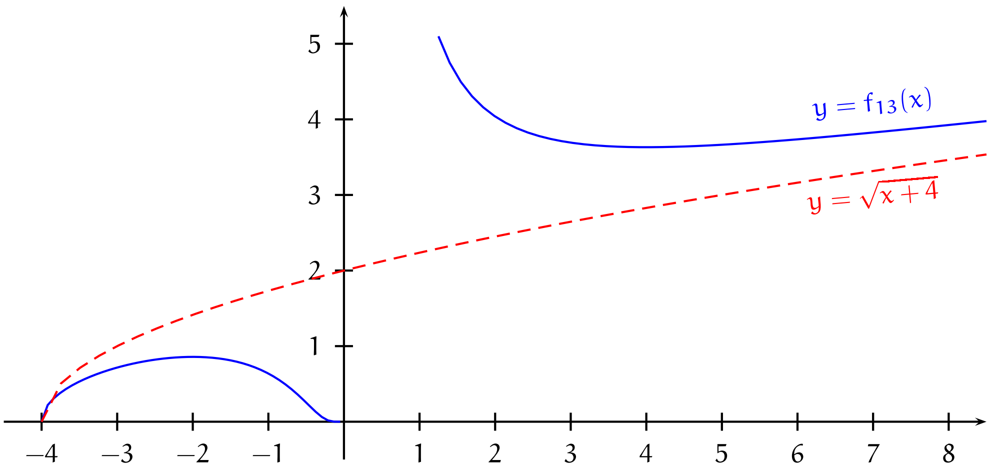
et comme $0 \leq f_{11}(x) \leq \pi$, on en déduit que $f_{11}(x) = \frac{\pi}{2}$.



12) f_{12} est définie sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, paire, continue sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, dérivable sur $]-1, 1[\setminus\{0\}$.
Pour $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$, $f'_{12}(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{\operatorname{Arcsin} x}{x^2}$ est du signe de $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \operatorname{Arcsin} x$. $g'(x) = \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}$ est positive sur $]-1, 1[$ et donc g est croissante sur $[-1, 1]$. Puisque $g(0) = 0$, g est positive sur $[0, 1]$.



13) Sur $]-4,+\infty[\setminus\{0\}$, $f'_{14}(x)$ est du signe de $-\dfrac{1}{x^2}\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$ ou encore de x^2-2x-4 qui s'annule en $1\pm\sqrt{5}$.

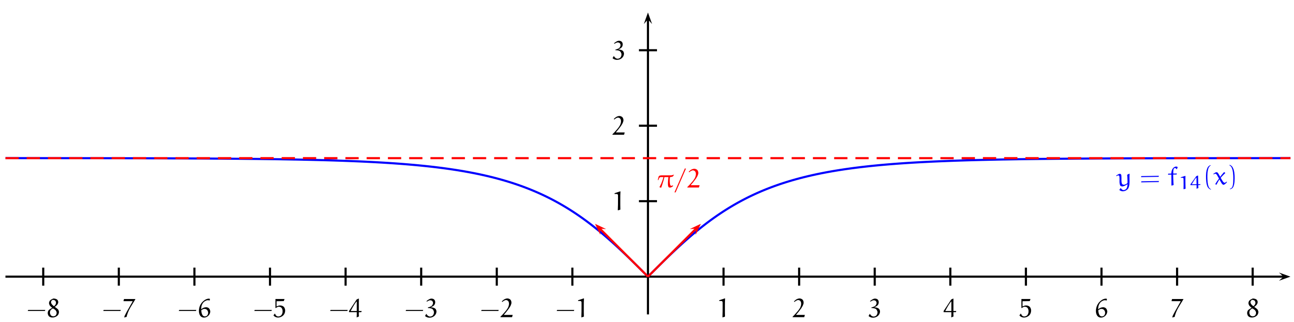


14) $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\leq 1$. f_{14} est définie et continue sur $\mathbb{R}$, paire, dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $x\mapsto\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$ est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1]$ et $y\mapsto\operatorname{Arccos}y$ est strictement décroissante sur $]0,1]$. Donc f_{14} est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, tend vers $\operatorname{Arccos}(0)=\dfrac{\pi}{2}$ quand x tend vers $+\infty$.

En 0 à droite, $\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$ tend vers $\operatorname{Arccos}1=0$ et donc

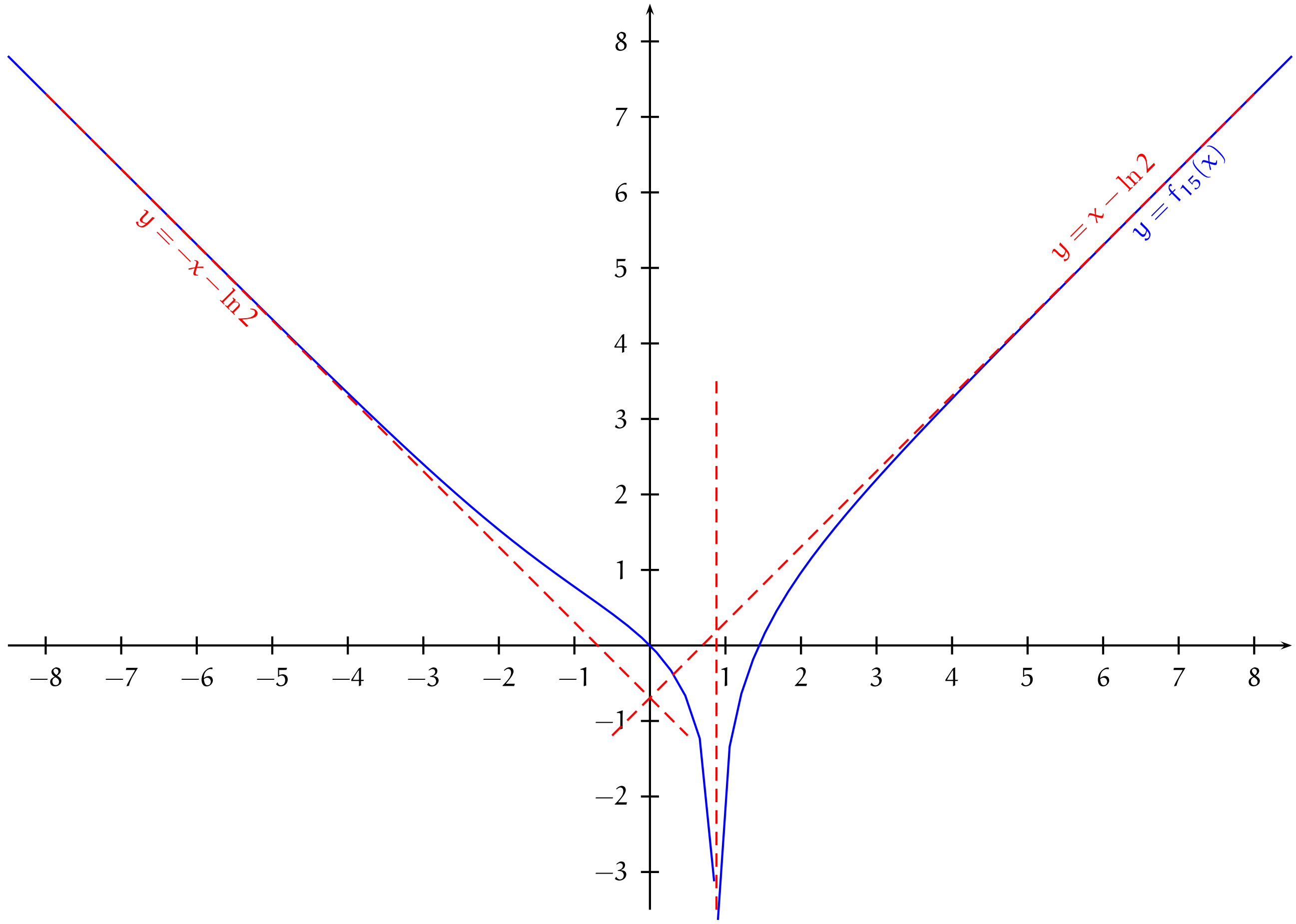
$$\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)\sim\sin\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)\right)=\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}=\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x}}=\operatorname{th}x\sim x.$$

La droite d'équation $y=x$ est tangente à droite à $\mathscr{C}_{14}$ en O.



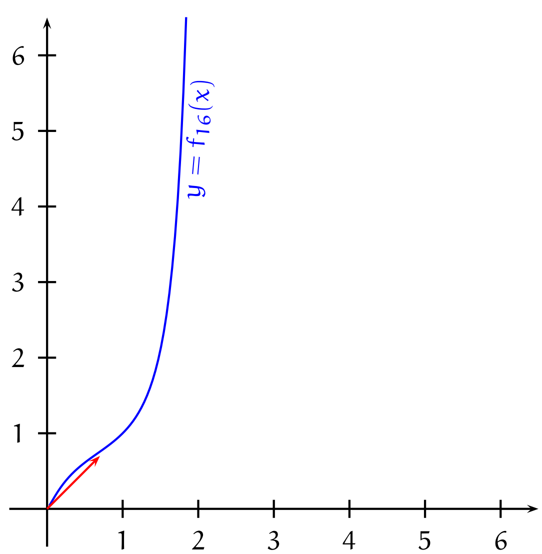
15) $\operatorname{sh} x = 1 \Leftrightarrow x = \operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$. f_{15} est strictement croissante sur $]\ln(1+\sqrt{2}), +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, \ln(1+\sqrt{2})[$ par composition.

Pour $x < \ln(1+\sqrt{2})$, $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x - 1}$ puis $f''(x) = -\dfrac{\operatorname{sh} x + 1}{(\operatorname{sh} x - 1)^2}$. Donc point d'inflexion d'abscisse $\operatorname{argsh}(-1) = -\ln(1+\sqrt{2})$.

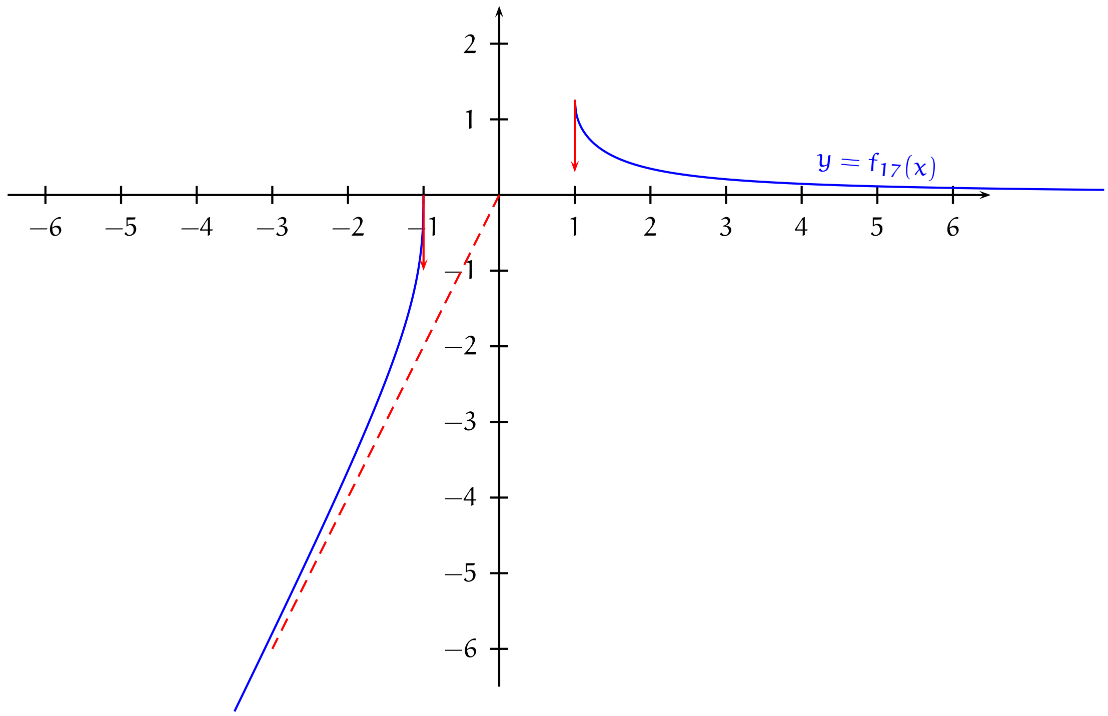


16) • Pour $x > 0$, $x^{(x^x)} = e^{e^{x\ln x}\ln x}$. Quand x tend vers 0, $x \ln x$ tend vers 0 et donc $e^{x\ln x} \ln x \sim \ln x$. On en déduit que $e^{x\ln x}\ln x$ tend vers $-\infty$ puis que $f_{17}(x)$ tend vers 0.

• Pour $x > 0$, $\dfrac{f_{16}(x)}{x} = x^{x^x - 1} = e^{(e^{x\ln x}-1)\ln x}$. Quand x tend vers 0, $x\ln x$ et donc $(e^{x\ln x}-1)\ln x \sim x\ln^2 x$ qui tend vers 0. On en déduit que $\dfrac{f_{16}(x)}{x}$ tend vers 1 quand x tend vers 0.



17)



18) f_{18} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire, strictement croissante sur $[0, +\infty[$. En $+\infty$,

$$f_{18}(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}) = x - \ln 2 + o(1).$$

La droite déquation $y = x - \ln 2$ est asymptote à en $+\infty$.