Planche n° 27. Intégration

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Toutes les fonctions considéres dans cette planche sont à valeurs réelles .

n° 1 : (****) Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, b]$. Pour n entier naturel non nul donné, on pose $u_n = \left(\int_a^b (f(x))^n g(x)\, dx\right)^{1/n}$.
Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite (commencer par le cas $g = 1$).

n° 2 : (I)**
1) Soit f une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(1) \neq 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ puis déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$ (étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$).
2) Mêmes questions en supposant que f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ et que $f(1) = 0$ et $f'(1) \neq 0$.

n° 3 : (*IT)** Limites de

1) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\frac{k\pi}{n}$ **2)** $\displaystyle\left(\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(a+k)\right)^{1/n}$ $(a > 0$ donné$)$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$
5) $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} E\left(\sqrt{k}\right)$ **6)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}$ **7)** $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}$ **8)** $\displaystyle n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-n/k}}{k^2}$

n° 4 : (*I)** Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0, 1]$. Déterminer le réel a tel que :

$$\int_0^1 f(t)\, dt - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

n° 5 : (I)** (Le lemme de Lebesgue).
1) On suppose que f est une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\, dt = 0$.
2) (***) Redémontrer le même résultat en supposant simplement que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ (commencer par le cas des fonctions en escaliers).

n° 6 : (*T)** Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a, b]$.
Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\, dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\, dt\right)\end{array}$.
1) Montrer que $\varphi(E)$ n'est pas majoré.
2) Montrer que $\varphi(E)$ est minoré. Trouver $m = \text{Inf}\{\varphi(f),\ f \in E\}$. Montrer que cette borne inférieure est atteinte et trouver toutes les f de E telles que $\varphi(f) = m$.

n° 7 : (***) Etude complète de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x \frac{t^2}{\sqrt{1+t^8}}\, dt$.

n° 8 : (***) Pour x réel, on pose $f(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\, dt$.
1) Montrer que f est impaire et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2xf(x) = 1$.

4) Soit $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et que g admet sur $]0, +\infty[$ un unique zéro noté x_0 vérifiant de plus $0 < x_0 < 1$.

5) Dresser le tableau de variations de f.

n° 9 : (***) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $2\int_0^1 f^2(t)\, dt \leq \int_0^1 f'^2(t)\, dt$.

n° 10 : (***) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour x réel, on pose $F(x) = \int_a^b |t-x| f(t)\, dt$. Etudier la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$.

n° 11 : (***) Soit a un réel strictement positif et f une application de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\forall x \in [0, a],\ \forall y \in [0, f(a)],\ xy \leq \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^y f^{-1}(t)\, dt$.

n° 12 : (I)** Soit f continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 f(t)\, dt = \dfrac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

n° 13 : (**) Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1],\ f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right) \geq 1$.

n° 14 : (***) Partie principale quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \dfrac{1}{(n+k)^2}$.

n° 15 : (**) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \sin \dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

n° 16 : (**) Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$\textbf{1)}\ u_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 \text{Arcsin}^n x\, dx \quad \textbf{2)}\ v_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx \quad \textbf{3)}\ w_n = \int_0^{\pi} \frac{n \sin x}{x+n}\, dx.$$

n° 17 : (***) Etude complète de $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$.

n° 18 : (***) Trouver toutes les applications continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt$.

n° 19 : (***) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$ et soit $M = \sup\{|f'(x)|,\ x \in [a, b]\}$. Montrer que $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq M\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

n° 20 : (I)** Déterminer les fonctions f continues sur $[0, 1]$ vérifiant $\left|\int_0^1 f(t)\, dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$.

n° 21 : (*I)**

1) Déterminer $\lim_{x \to 1} \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

2) Etude complète de $F(x) = \int_x^{x^2} \dfrac{dt}{\ln t}$.

n° 22 : (****) Soit $f(t) = \dfrac{t^2}{e^t - 1}$ si $t \neq 0$ et 0 si $t = 0$.

1) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. Montrer que F a une limite réelle ℓ quand x tend vers $+\infty$ puis que $\ell = 2 \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.