Planche n° 28. Calculs de primitives et d'intégrales

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1) $\dfrac{1}{x^3+1}$ **2)** $\dfrac{x^2}{x^3+1}$ **3)** $\dfrac{x^5}{x^3-x^2-x+1}$ **4)** $\dfrac{1-x}{(x^2+x+1)^5}$ **5)** $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$
6) $\dfrac{x^2+x}{x^6+1}$ **7)** $\dfrac{1}{x^4+1}$ **8)** $\dfrac{1}{(x^4+1)^2}$ **9)** $\dfrac{1}{x^8+x^4+1}$ **10)** $\dfrac{x}{(x^4+1)^3}$
11) $\dfrac{1}{(x+1)^7-x^7-1}$

n° 2 : Même énoncé.

1) $\dfrac{1}{\cos x}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ **2)** $\dfrac{1}{\sin x}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$ **3)** $\dfrac{1}{\tan x}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ **4)** $\dfrac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}$ **5)** $\dfrac{1}{2+\sin^2 x}$
6) $\dfrac{\cos x}{\cos x+\sin x}$ **7)** $\dfrac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}$ **8)** $\dfrac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}$ **9)** $\dfrac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$ **10)** $\dfrac{\tan x}{1+\sin(3x)}$
11) $\dfrac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}$ **12)** $\dfrac{\sin x}{\cos(3x)}$ **13)** $\dfrac{1}{\alpha\cos^2 x+\beta\sin^2 x}$ **14)** $\dfrac{\operatorname{ch}^3 x}{1+\operatorname{sh} x}$ **15)** $\sqrt{\operatorname{ch} x-1}$
16) $\dfrac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{ch} x}$ **17)** $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^5 x}$ **18)** $\dfrac{1}{1-\operatorname{ch} x}$

n° 3 : Même énoncé.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ et $\sqrt{x^2+2x+5}$ **2)** $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ **3)** $\dfrac{\sqrt{1+x^6}}{x}$ **4)** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ **5)** $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
6) $\dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}$ **7)** $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$ **8)** $\dfrac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}$ **9)** $\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$
10) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

n° 4 : Même énoncé.

1) $\dfrac{1}{x\ln x}$ **2)** $\operatorname{Arcsin} x$ **3)** $\operatorname{Arctan} x$ **4)** $\operatorname{Arccos} x$ **5)** $\operatorname{argsh} x$
6) $\operatorname{argch} x$ **7)** $\operatorname{argth} x$ **8)** $\ln(1+x^2)$ **9)** $e^{\operatorname{Arccos} x}$ **10)** $\cos x\ln(1+\cos x)$
11) $\dfrac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}}$ **12)** $\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$ **13)** $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x\ln x$ **14)** $x^n\ln x$ $(n\in\mathbb{N})$ **15)** $e^{ax}\cos(\alpha x)$ $((a,\alpha)\in(\mathbb{R}^*)^2)$
16) $\sin(\ln x)$ et $\cos(\ln x)$ **17)** $\dfrac{\sqrt{x^n+1}}{x}$ **18)** $x^2e^x\sin x$

n° 5 : Calculer les intégrales suivantes (a, b réels donnés, p et q entiers naturels donnés)

1) $\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx\,(a>0)$ **2)** $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos(px)\cos(qx)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\cos(px)\sin(qx)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} 2\sin(px)\sin(qx)\,dx$

3) $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx$ **4)** $\displaystyle\int_{-2}^{2} (|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\,dx$

5) $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\text{Arctan}\,x\,dx$ **6)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1+|x(1-x)|}\,dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ **8)** $\displaystyle\int_1^x (\ln t)^n\,dt\ (n\in\mathbb{N}^*)$

n° 6 : Condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour que les primitives de $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2}$ soient rationnelles (a, b, c et d réels donnés).

n° 7 : Etude de $f(x)=\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{1-2t\cos x+t^2}\,dt$.

n° 8 : Même énoncé que le n° 7 avec $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \text{Max}(x,t)\,dt$.

n° 9 : (Intégrales de Wallis)

Pour n entier naturel, on pose $W_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.

1) Calculer W_0 et W_1. Déterminer une relation entre W_n et W_{n+2} et en déduire W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de n.

2) Etudier les variations de la suite (W_n) et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{W_{n+1}}{W_n}$.

3) Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$, puis un équivalent simple de W_n. En écrivant $\displaystyle\int_0^{\pi/2}=\int_0^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\pi/2}$, retrouver directement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.

4) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1\times3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times\ldots\times(2n)}\right)^2=\frac{1}{\pi}$. (Formule de Wallis)

n° 10 : Pour n entier naturel, on pose $In=\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$.

1) Calculer I_0 et I_1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}. En déduire I_n en fonction de n.

2) Montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et en déduire les limites des suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ et $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.