Planche n° 28. Calculs de primitives et d'intégrales. Corrigé

n° 1 : **1)** I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$. f est continue sur I et admet donc des primitives sur I.

$$\frac{1}{X^3+1}=\frac{1}{(X+1)(X+j)(X+j^2)}=\frac{a}{X+1}+\frac{b}{X+j}+\frac{\overline{b}}{X+j^2},$$

où $a=\dfrac{1}{3(-1)^2}=\dfrac{1}{3}$ et $b=\dfrac{1}{3(-j)^2}=\dfrac{j}{3}$. Par suite,

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^3+1}&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{j}{X+j}+\frac{j^2}{X+j^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}+\frac{-X+2}{X^2-X+1}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\frac{2X-1}{X^2-X+1}+\frac{3}{2}\frac{1}{X^2-X+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{X+1}-\frac{1}{2}\times\frac{2X-1}{X^2-X+1}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

Mais alors,

$$\int\frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{6}(2\ln|x+1|-\ln(x^2-x+1))+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

$$\boxed{\int\frac{1}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{6}\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

2) I est l'un des deux intervalles $]-\infty,-1[$ ou $]1,+\infty[$. Sur I, $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C$.

$$\boxed{\int\frac{x^2}{x^3+1}\,dx=\frac{1}{3}\ln(x^3+1)+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

3) $X^3-X^2-X+1=X^2(X-1)-(X-1)=(X^2-1)(X-1)=(X-1)^2(X+1)$. Donc, la décomposition en éléments simples de $f=\dfrac{X^5}{X^3-X^2-X+1}$ est de la forme $aX^2+bX+c+\dfrac{d_1}{X-1}+\dfrac{d_2}{(X-1)^2}+\dfrac{e}{X+1}$.

• **Détermination de a, b et c.** La division euclidienne de X^5 par X^3-X^2-X+1 s'écrit

$$X^5=(X^2+X+2)(X^3-X^2-X+1)+2X^2+X-2.$$

On a donc $\boxed{a=1,\ b=1\text{ et }c=2}$.

• $e=\lim\limits_{x\to-1}(x+1)f(x)=\dfrac{(-1)^5}{(-1-1)^2}=-\dfrac{1}{4}$. $\boxed{e=-\dfrac{1}{4}}$.

• $d_2=\lim\limits_{x\to1}(x-1)^2f(x)=\dfrac{1^5}{1+1}=\dfrac{1}{2}$. $\boxed{d_2=\dfrac{1}{2}}$. Enfin, $x=0$ fournit $0=c-d_1+d_2+e$ et donc, $d_1=2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$.
Finalement,

$$\frac{X^5}{X^3-X^2-X+1}=X^2+X+2+\frac{9}{4}\frac{1}{X-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{X+1},$$

et donc, I désignant l'un des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$, on a sur I

$$\boxed{\int \frac{x^5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\frac{9}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C.}$$

4) Sur $\mathbb{R}$,

$$\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^5}\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2+x+1)^5}\,dx = \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)^5}\,dx$$

$$= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)^2+\frac{3}{4}\right)^5}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,du \text{ (en posant } x+\frac{1}{2}=\frac{u\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{1}{8(x^2+x+1)^4}+\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du.$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons alors $I_n=\int \frac{du}{(u^2+1)^n}$. Une intégration par parties fournit

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n\right)$. Mais alors,

$$\begin{aligned}
I_5 &= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8}I_4=\frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8\times 6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7\times 5}{8\times 6}I_3\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8\times 6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7\times 5}{8\times 6\times 4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7\times 5\times 3}{8\times 6\times 4}I_2\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8\times 6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7\times 5}{8\times 6\times 4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7\times 5\times 3}{8\times 6\times 4\times 2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7\times 5\times 3\times 1}{8\times 6\times 4\times 2}I_1\\
&= \frac{1}{8}\frac{u}{(u^2+1)^4}+\frac{7}{8\times 6}\frac{u}{(u^2+1)^3}+\frac{7\times 5}{8\times 6\times 4}\frac{u}{(u^2+1)^2}+\frac{7\times 5\times 3}{8\times 6\times 4\times 2}\frac{u}{u^2+1}+\frac{7\times 5\times 3\times 1}{8\times 6\times 4\times 2}\,\mathrm{Arctan}\,u+C.
\end{aligned}$$

Maintenant,

$$u^2+1=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1=\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}(x^2+x+1).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\int \frac{1}{(u^2+1)^5}\,du = \frac{2^8\sqrt{3}}{3^4}\Bigg(&\frac{1}{8}\frac{3^4}{4^4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2+x+1)^4}+\frac{7}{8\times 6}\frac{3^3}{4^3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2+x+1)^3}+\frac{7\times 5}{8\times 6\times 4}\frac{3^2}{4^2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x^2+x+1)^2}\\
&+\frac{7\times 5\times 3}{8\times 6\times 4\times 2}\frac{3}{4}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x^2+x+1}+\frac{7\times 5\times 3\times 1}{8\times 6\times 4\times 2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Bigg)+C,
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int \frac{1-x}{(x^2+x+1)^5}\,dx = &\frac{x+1}{4(x^2+x+1)^4}+\frac{7(2x+1)}{36(x^2+x+1)^3}+\frac{35(2x+1)}{108(x^2+x+1)^2}+\frac{35(2x+1)}{54(x^2+x+1)}\\ &+\frac{70\sqrt{3}}{81}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\ C\in\mathbb{R}.\end{aligned}}$$

(il reste encore à réduire au même dénominateur).

5) Sur $I =]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$, on pose $u = x^2$ et donc $du = 2xdx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \frac{x}{x^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(u+1)^2} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2}\right)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln|u| - \ln|u+1| + \frac{1}{u+1}\right) + C \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

6) Sur $I = \mathbb{R}$, $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx + \int \frac{x}{x^6+1}\,dx$.
Ensuite, en posant $u = x^3$ et donc $du = 3x^2\,dx$,

$$\int \frac{x^2}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(x^3) + C,$$

et en posant $u = x^2$ et donc $du = 2x\,dx$,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^6+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^3+1}\,du = \frac{1}{6}\ln\frac{(u+1)^2}{u^2-u+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} + C \text{ (voir 1))} \\ &= \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{Arctan}(x^3) + \frac{1}{6}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

7) $\displaystyle\frac{1}{X^4+1} = \sum_{k=0}^{3} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$ où $z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})}$. De plus, $\lambda_k = \dfrac{1}{4z_k^3} = \dfrac{z_k}{4z_k^4} = -\dfrac{z_k}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{X^4+1} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i\pi/4}}{X - e^{i\pi/4}} + \frac{e^{-i\pi/4}}{X - e^{-i\pi/4}} + \frac{-e^{i\pi/4}}{X + e^{i\pi/4}} + \frac{-e^{-i\pi/4}}{X + e^{-i\pi/4}}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}X - 2}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} - \frac{\sqrt{2}X + 2}{X^2 + \sqrt{2}X + 1}\right).\end{aligned}$$

Mais,

$$\frac{\sqrt{2}X - 2}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2X - \sqrt{2}}{X^2 - \sqrt{2}X + 1} - \frac{1}{\left(X - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

et donc, sur $I = \mathbb{R}$,

$$\int \frac{\sqrt{2}x - 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) - \sqrt{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x - 1) + C,$$

et de même,

$$\int \frac{\sqrt{2}x + 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \sqrt{2}\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}x + 1) + C.$$

Finalement,

$$\boxed{\int \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\text{Arctan}(\sqrt{2}x-1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}x+1)) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

8) Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,dx &= \frac{x}{x^4+1} + \int \frac{4x^4}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{x^4+1-1}{(x^4+1)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{x^4+1} + 4\int \frac{1}{x^4+1}\,dx - 4\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx,\end{aligned}$$

et donc d'après 7)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^4+1} + 3\int \frac{1}{x^4+1}\,dx\right) \\ &= \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}}(\text{Arctan}(\sqrt{2}x-1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}x+1)) + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx = \frac{x}{4(x^4+1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{3}{8\sqrt{2}}(\text{Arctan}(\sqrt{2}x-1)+\text{Arctan}(\sqrt{2}x+1)) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

9) Posons $R = \dfrac{1}{X^8+X^4+1}$.

$$\begin{aligned}X^8+X^4+1 &= \frac{X^{12}-1}{X^4-1} = \frac{\prod_{k=0}^{11}(X-e^{2ik\pi/12})}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} \\ &= (X-e^{i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X+e^{i\pi/6})(X+e^{-i\pi/6})(X-j)(X-j^2)(X+j)(X+j^2).\end{aligned}$$

R est réelle et paire. Donc,

$$R = \frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\overline{a}}{X+j^2} + \frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} - \frac{b}{X+e^{i\pi/6}} - \frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}.$$

$a = \dfrac{1}{8j^7+4j^3} = \dfrac{1}{4(2j+1)} = \dfrac{2j^2+1}{4(2j+1)(2j^2+1)} = \dfrac{-1-2j}{12}$ et donc,

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} = \frac{1}{12}\left(\frac{-1-2j}{X-j} + \frac{-1-2j^2}{X-j^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{X^2+X+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

et par parité,

$$\frac{a}{X-j} + \frac{\overline{a}}{X-j^2} - \frac{a}{X+j} - \frac{\overline{a}}{X+j^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right).$$

Ensuite, $b = \dfrac{1}{8e^{7i\pi/6}+4e^{3i\pi/6}} = \dfrac{1}{4e^{i\pi/6}(-2-j^2)} = \dfrac{e^{-i\pi/6}}{4(-1+j)} = \dfrac{e^{-i\pi/6}(-1+j^2)}{12} = \dfrac{e^{-i\pi/6}(-2-j)}{12} = \dfrac{-2e^{-i\pi/6}-i}{12}$ et donc,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}} = \frac{1}{12}\left(\frac{-2e^{-i\pi/6}-i}{X-e^{i\pi/6}} + \frac{-2e^{i\pi/6}+i}{X-e^{-i\pi/6}}\right) = \frac{1}{12}\frac{-2\sqrt{3}X+3}{X^2-\sqrt{3}X+1} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}.$$

Par parité,

$$\frac{b}{X-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{b}}{X-e^{-i\pi/6}}-\frac{b}{X+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{b}}{X+e^{-i\pi/6}}=-\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}.$$

Finalement,

$$R=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2X-\sqrt{3}}{X^2-\sqrt{3}X+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2X+\sqrt{3}}{X^2+\sqrt{3}X+1}\right),$$

puis

$$\boxed{\int\frac{1}{x^8+x^4+1}\,dx=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\text{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\text{Arctan}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{x^2+\sqrt{3}x+1}{x^2-\sqrt{3}x+1}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

10) En posant $u=x^2$ et donc $du=2x\,dx$, on obtient $\displaystyle\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(u^2+1)^3}\,du$.

Pour $n\geq 1$, posons $I_n=\displaystyle\int\frac{1}{(u^2+1)^n}\,du$. Une intégration par parties fournit :

$$I_n=\frac{u}{(u^2+1)^n}+\int\frac{u(-n)(2u)}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^{n+1}}\,du=\frac{u}{(u^2+1)^n}+2n(I_n-I_{n+1}),$$

et donc, $\forall n\geq 1,\ I_{n+1}=\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{u}{(u^2+1)^n}+(2n-1)I_n\right)$.

On en déduit que

$$I_3=\frac{1}{4}\left(\frac{u}{(u^2+1)^2}+3I_2\right)=\frac{u}{4(u^2+1)^2}+\frac{3}{8(u^2+1)}+\frac{3}{8}\,\text{Arctan}\,u+C,$$

et finalement que

$$\boxed{\int\frac{x}{(x^4+1)^3}\,dx=\frac{1}{16}\left(\frac{2x^2}{(x^4+1)^2}+\frac{3}{x^4+1}+3\,\text{Arctan}(x^2)\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

11) Posons $R=\dfrac{1}{(X+1)^7-X^7-1}$.

$$\begin{aligned}(X+1)^7-X^7-1&=7X^6+21X^5+35X^4+35X^3+21X^2+7X=7X(X^5+3X^4+5X^3+5X^2+3X+1)\\&=7X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)=7X(X+1)(X^2+X+1)^2.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}=\frac{1}{X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2}=\frac{a}{X}+\frac{b}{X+1}+\frac{c_1}{X-j}+\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}.$$

• $a=\lim\limits_{x\to 0}xR(x)=\dfrac{1}{7}$ et $b=\lim\limits_{x\to -1}(x+1)R(x)=-\dfrac{1}{7}$.

• $c_2=\lim\limits_{x\to j}(x-j)^2R(x)=\dfrac{1}{7j(j+1)(j-j^2)^2}=\dfrac{1}{7j(-j^2)j^2(1-2j+j^2)}=\dfrac{1}{21}$. Puis,

$$\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}=\frac{1}{21}\frac{(X-j^2)^2+(X-j)^2}{(X^2+X+1)^2}=\frac{2X^2+2X-1}{21(X^2+X+1)^2},$$

et

$$\begin{aligned}R-\left(\frac{c_2}{(X-j)^2}+\frac{\overline{c_2}}{(X-j^2)^2}\right)&=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{X(X+1)(X^2+X+1)^2}-\frac{2X^2+2X-1}{3(X^2+X+1)^2}\right)=\frac{3-X(X+1)(2X^2+2X-1)}{21X(X+1)(X^2+X+1)^2}\\&=\frac{-2X(X+1)(X^2+X+1)+3+3X(X+1)}{21X(X+1)(X^2+X+1)^2}=\frac{-2X^2-2X+3}{21X(X+1)(X^2+X+1)}.\end{aligned}$$

• $c_1=\dfrac{-2j^2-2j+3}{21j(j+1)(j-j^2)}=\dfrac{5}{21(j^2-j)}=\dfrac{5(j-j^2)}{21(j-j^2)(j^2-j)}=\dfrac{5(j-j^2)}{63}$ puis

$$\frac{c_1}{X-j}+\frac{\overline{c_1}}{X-j^2}=\frac{1}{63}\left(\frac{5(j-j^2)}{X-j}+\frac{5(j^2-j)}{X-j^2}\right)=-\frac{5}{21(X^2+X+1)}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(X+1)^7-X^7-1}&=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{3(X^2+X+1)}+\frac{1}{3(X-j)^2}+\frac{1}{3(X-j^2)^2}\right)\\&=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}-\frac{5}{3}\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(X-j)^2}+\frac{1}{(X-j^2)^2}\right)\right).\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx&=\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-j}+\frac{1}{x-j^2}\right)\right)+C\\&=\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int\frac{1}{(x+1)^7-x^7-1}\,dx=\frac{1}{7}\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{10}{3\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

n° 2 : 1) On pose $t=\tan\frac{x}{2}$ et donc $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}\,dx&=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2dt}{1+t^2}=\int 2\frac{1}{1-t^2}\,dt=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{x}{2}}\right|+C\\&=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}\,dx&=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right|+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,\end{aligned}$$

ou bien, en posant $u=x+\frac{\pi}{2}$, (voir 2))

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\int\frac{1}{\cos\left(u-\frac{\pi}{2}\right)}\,du=\int\frac{1}{\sin u}\,du=\ln|\tan\frac{u}{2}|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

$$\boxed{\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

En posant $t=e^x$ et donc $dx=\frac{dt}{t}$,

$$\int\frac{1}{\operatorname{ch}x}\,dx=\int\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\frac{dt}{t}=2\int\frac{1}{1+t^2}\,dt=2\operatorname{Arctan}(e^x)+C,$$

ou bien

$$\int\frac{1}{\operatorname{ch}x}\,dx=\int\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x+1}\,dx=\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}x)+C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx = 2\operatorname{Arctan}(e^x) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

Remarque. Les fonctions $x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(e^x)$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x)$ diffèrent donc d'une constante. En analysant la valeur en 0, on obtient $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\operatorname{Arctan}(e^x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) + \dfrac{\pi}{2}$.

2) En posant $t = \tan \dfrac{x}{2}$,

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$ et $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{th} x} = \ln|\operatorname{sh} x| + C$.

$$\boxed{\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \ln|\sin x| + C,\ C \in \mathbb{R} \text{ et } \int \frac{1}{\operatorname{th} x}\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2(x/2)}{x - \sin x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x - \sin x| + C$.

$$\boxed{\int \frac{\sin^2(x/2)}{x-\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-\sin x| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

5) L'expression $\dfrac{1}{2+\sin^2 x}\,dx$ est invariante par le changement $x \mapsto x+\pi$. Les règles de Bioche invitent à poser $u = \tan x$.

$\dfrac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \dfrac{1}{\dfrac{2}{\cos^2 x} + \tan^2 x}\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2+3\tan^2 x}d(\tan x)$, et en posant $u = \tan x$,

$$\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{2+3u^2}\,du = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{2+\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\tan x\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

6) Posons $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx$ et $J = \displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$.

Alors, $I + J = \displaystyle\int dx = x + C$ et $I - J = \displaystyle\int \frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\,dx = \ln|\cos x + \sin x| + C$. En additionnant ces deux égalités, on obtient :

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C.$$

ou bien, en posant $u = x - \dfrac{\pi}{4}$,

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\,dx = \int \frac{\cos\left(u + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos u}\,du = \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{\sin u}{\cos u}\right)\,du = \frac{1}{2}(u + \ln|\cos u|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4} + \ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x + \sin x)\right|\right) + C = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C'.$$

$$\boxed{\int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} = \frac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

7)

$$\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\ dx=\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{4\sin x-4\sin^3 x}=\frac{1}{4}\times\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x(1-\sin^2 x)}=\frac{1}{4}\left(\frac{4\cos x}{\sin x}-\frac{3}{\sin x\cos x}\right)=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{3}{2}\frac{1}{\sin(2x)}.$$

Par suite,

$$\boxed{\int\frac{\cos(3x)}{\sin x+\sin(3x)}\ dx=\ln|\sin x|-\frac{3}{4}\ln|\tan x|+C.}$$

8) $\cos^4 x+\sin^4 x=(\cos^2 x+\sin^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2(2x)$, et donc

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx&=\int\frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin^2(2x)}\ dx=\int\frac{1}{2-\sin^2 u}\ du \text{ (en posant } u=2x)\\&=\int\frac{1}{1+\cos^2 u}\ du=\int\frac{1}{1+\frac{1}{1+v^2}}\ \frac{dv}{1+v^2} \text{ (en posant } v=\tan u)\\&=\int\frac{dv}{v^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\frac{v}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int\frac{1}{\cos^4 x+\sin^4 x}\ dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\tan(2x)}{\sqrt{2}}\right)+C.}$$

9)

$$\begin{aligned}\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\ dx&=\frac{2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x+1}\cos x\ dx=\frac{2\sin^2 x}{2-2\sin^2 x(1-\sin^2 x)}\cos x\ dx\\&=\frac{u^2}{u^4-u^2+1}\ du \text{ (en posant } u=\sin x).\end{aligned}$$

Maintenant, $u^4-u^2+1=\dfrac{u^6+1}{u^2+1}=(u-e^{i\pi/6})(u-e^{-i\pi/6})(u+e^{i\pi/6})(u+e^{-i\pi/6})$, et donc,

$$\frac{u^2}{u^4-u^2+1}=\frac{a}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{\overline{a}}{u-e^{-i\pi/6}}-\frac{a}{u+e^{i\pi/6}}-\frac{\overline{a}}{u+e^{-i\pi/6}},$$

ou $a=\dfrac{(e^{i\pi/6})^2}{(e^{i\pi/6}-e^{-i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{i\pi/6})(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6})}=\dfrac{(e^{i\pi/6})^2}{i\times 2e^{i\pi/6}\times\sqrt{3}}=\dfrac{e^{-i\pi/3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{-j}{2\sqrt{3}}$, et donc

$$\begin{aligned}\frac{u^2}{u^4-u^2+1}&=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{-j}{u-e^{i\pi/6}}+\frac{-j^2}{u-e^{-i\pi/6}}+\frac{j}{u+e^{i\pi/6}}+\frac{j^2}{u+e^{-i\pi/6}}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{2u-\sqrt{3}}{u^2-\sqrt{3}u+1}-\frac{2u+\sqrt{3}}{u^2+\sqrt{3}u+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(u+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{1}{\left(u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\int\frac{\sin x\sin(2x)}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}\ dx=\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x+1}{\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x+1}\right|+\frac{1}{2}\Big(\operatorname{Arctan}(2\sin x-\sqrt{3})+\operatorname{Arctan}(2\sin x+\sqrt{3})\Big)+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

10) En posant $u = \sin x$, on obtient

$$\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\ dx = \frac{\sin x}{1+3\sin x - 4\sin^3 x}\frac{1}{\cos^2 x}\cos x\ dx = \frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)}\ du$$

Or, $1+3u-4u^3 = (u+1)(-4u^2-4u-1) = -(u-1)(2u+1)^2$ et donc, $(1+3u-4u^3)(1-u^2) = (u+1)(u-1)^2(2u+1)^2$. Par suite

$$\frac{u}{(1+3u-4u^3)(1-u^2)} = \frac{a}{u+1} + \frac{b_1}{u-1} + \frac{b_2}{(u-1)^2} + \frac{c_1}{2u+1} + \frac{c_2}{(2u+1)^2}.$$

$a = \lim\limits_{u\to -1}(u+1)f(u) = \dfrac{-1}{(-1-1)^2(-2+1)^2} = -\dfrac{1}{4}$, $b_2 = \dfrac{1}{(1+1)(2+1)^2} = \dfrac{1}{18}$ et $c_2 = \dfrac{-1/2}{(-\frac{1}{2}+1)(-\frac{1}{2}-1)^2} = -\dfrac{4}{9}$.

Ensuite, $u = 0$ fournit $0 = a - b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ ou encore $c_1 - b_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{18} + \dfrac{4}{9} = \dfrac{23}{36}$. D'autre part, en multipliant par u, puis en faisant tendre u vers $+\infty$, on obtient $0 = a + b_1 + c_1$ et donc $c_1 + b_1 = \dfrac{1}{4}$ et donc, $c_1 = \dfrac{4}{9}$ et $b_1 = -\dfrac{7}{36}$. Finalement,

$$\frac{u}{(u+1)(u-1)^2(2u+1)^2} = -\frac{1}{4(u+1)} - \frac{7}{36(u-1)} + \frac{1}{18(u-1)^2} + \frac{4}{9(2u+1)} - \frac{4}{9(2u+1)^2},$$

et donc

$$\boxed{\int \frac{\tan x}{1+\sin(3x)}\ dx = -\frac{1}{4}\ln(1+\sin x) - \frac{7}{36}\ln(1-\sin x) - \frac{1}{18(\sin x - 1)} + \frac{2}{9}\ln|2\sin x + 1| + \frac{2}{9(2\sin x+1)} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

11) (voir 6))

$$\int \frac{\cos x + 2\sin x}{\sin x - \cos x}\ dx = \int \frac{\frac{1}{2}((\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)) + ((\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x))}{\sin x - \cos x}\ dx$$
$$= \frac{3}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \frac{x}{2} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{\cos x + 2\sin x}{\sin x - \cos x}\ dx = \frac{3}{2}\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{3}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \frac{x}{2} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

12)

$$\int \frac{\sin x}{\cos(3x)}\ dx = \int \frac{\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x}\ dx = \int \frac{1}{3u - 4u^3}\ du \text{ (en posant } u = \cos x)$$
$$= \int \left(\frac{1}{3u} - \frac{1}{3(2u-\sqrt{3})} - \frac{1}{3(2u+\sqrt{3})}\right)\ du$$
$$= \frac{1}{3}(\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x - \sqrt{3}| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x + \sqrt{3}|) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{\sin x}{\cos(3x)}\ dx = \frac{1}{3}(\ln|\cos x| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x - \sqrt{3}| - \frac{1}{2}\ln|2\cos x + \sqrt{3}|) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

13) Dans tous les cas, on pose $t = \tan x$ et donc $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\ dx = \int \frac{1}{\alpha + \beta\tan^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{\alpha + \beta t^2}.$$

• Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, $\displaystyle\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\ dx = \frac{1}{\alpha}\tan x + C$.

• Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta > 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2}\,dt = \frac{\mathrm{sgn}(\beta)}{\sqrt{\alpha\beta}}\,\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\tan x\right) + C.$$

• Si $\beta \neq 0$ et $\alpha\beta < 0$,

$$\int \frac{1}{\alpha\cos^2 x + \beta\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{\beta}\int \frac{1}{t^2 - \left(\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2}\,dt = \frac{\mathrm{sgn}(\beta)}{2\sqrt{-\alpha\beta}}\ln\left|\frac{\tan x - \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}{\tan x + \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}}\right| + C.$$

14)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,dx &= \int \frac{1+\mathrm{sh}^2 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}\,x\,dx\\ &= \int \frac{u^2+1}{u+1}\,du \text{ (en posant } u = \mathrm{sh}\,x)\\ &= \int \left(u - 1 + \frac{2}{u+1}\right)\,du = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{2} - \mathrm{sh}\,x + 2\ln|1+\mathrm{sh}\,x| + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{ch}^3 x}{1+\mathrm{sh}\,x}\,dx = \frac{\mathrm{sh}^2 x}{2} - \mathrm{sh}\,x + 2\ln|1+\mathrm{sh}\,x| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

15) On peut poser $u = e^x$ mais il y a mieux.

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\mathrm{ch}\,x - 1}\,dx &= \int \frac{\sqrt{(\mathrm{ch}\,x-1)(\mathrm{ch}\,x+1)}}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx = \mathrm{sgn}(x)\int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1}}\,dx\\ &= 2\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1} + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \sqrt{\mathrm{ch}\,x - 1}\,dx = 2\mathrm{sgn}(x)\sqrt{\mathrm{ch}\,x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

16)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\,dx &= \int \frac{1}{\mathrm{ch}\,x(\mathrm{ch}\,x+1)}\,\mathrm{sh}\,x\,dx\\ &= \int \frac{1}{u(u+1)}\,du \text{ (en posant } u = \mathrm{ch}\,x) = \int (\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1})\,du = \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\right) + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\,dx = \ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{ch}\,x+1}\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

17) $\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sh}^5 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{sh}^6 x}\,dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x}{(\mathrm{ch}^2 x - 1)^3}\,dx = \int \frac{1}{(u^2-1)^3}\,du$ (en posant $u = \mathrm{ch}\,x$). Ensuite,

$$\frac{1}{(u^2-1)^3} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{(u-1)^2} + \frac{c}{(u-1)^3} - \frac{a}{u+1} + \frac{b}{(u+1)^2} - \frac{c}{(u+1)^3}.$$

$c = \displaystyle\lim_{u\to 1}(u-1)^3 \times \frac{1}{(u^2-1)^3} = \lim_{u\to 1}\frac{1}{(u+1)^3} = \frac{1}{8}$ puis

$$\frac{1}{(u^2-1)^3} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{(u-1)^3} - \frac{1}{(u+1)^3}\right) = \frac{8 - (u+1)^3 + (u-1)^3}{8(u^2-1)^3} = \frac{-6u^2+6}{8(u^2-1)^3} = -\frac{3}{4(u^2-1)^2}.$$

$b = \displaystyle\lim_{u\to 1}(u-1)^2 \times \frac{-3}{4(u^2-1)^2} = -\frac{3}{16}$. Enfin, $u = 0$ fournit $-1 = -2a + 2b - 2c$ et donc $a = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{3}{16}$. Donc

$$\frac{1}{(u^2-1)^3} = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{u-1} - \frac{3}{(u-1)^2} + \frac{2}{(u-1)^3} - \frac{3}{u+1} - \frac{3}{(u+1)^2} - \frac{2}{(u+1)^3}\right).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}\,dx &= \frac{1}{16}\left(3\ln\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1} + \frac{3}{\operatorname{ch} x-1} - \frac{1}{(\operatorname{ch} x-1)^2} + \frac{3}{\operatorname{ch} x+1} + \frac{1}{(\operatorname{ch} x+1)^2}\right) + C \\
&= \frac{1}{16}\left(3\ln\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1} + \frac{6\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch}^2 x-1} - \frac{4\operatorname{ch} x}{(\operatorname{ch}^2 x-1)^2}\right) + C \\
&= \frac{3}{16}\ln\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1} + \frac{\operatorname{ch} x(3\operatorname{sh}^2 x-2)}{8\operatorname{sh}^4 x} + C.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\operatorname{sh}^5 x}\,dx = \frac{3}{16}\ln\frac{\operatorname{ch} x-1}{\operatorname{ch} x+1} + \frac{\operatorname{ch} x(3\operatorname{sh}^2 x-2)}{8\operatorname{sh}^4 x} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

18)

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{ch} x}\,dx = \int \frac{1+\operatorname{ch} x}{1-\operatorname{ch}^2 x}\,dx = -\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx - \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}\,dx = \operatorname{coth} x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{1-\operatorname{ch} x}\,dx = \operatorname{coth} x + \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

n° 3 : 1)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+2^2}}\,dx = \operatorname{argsh}\frac{x+1}{2} + C \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{2} + \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\right) + C = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) + C'.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = \ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx &= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int (x+1)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx \\
&= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \frac{x^2+2x+5-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx \\
&= (x+1)\sqrt{x^2+2x+5} - \int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C.$$

$$\boxed{\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

(On peut aussi poser $x+1 = 2\operatorname{sh} u$).

2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin}(x-1) + C.$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \operatorname{Arcsin}(x-1) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

3) On pose $u = x^6$ puis $v = \sqrt{1+u}$ (ou directement $u = \sqrt{1+x^6}$) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\, dx &= \int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x^6}\, x^5 dx = \frac{1}{6}\int \frac{\sqrt{1+u}}{u}\, du \\
&= \frac{1}{6}\int \frac{v}{v^2-1} 2v\, dv = \frac{1}{3}\int \frac{v^2}{v^2-1}\, dv = \frac{1}{3}\int \left(1+\frac{1}{v^2-1}\right)\, dv = \frac{1}{3}\left(v + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right|\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right| + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{1+x^6}}{x}\, dx = \frac{1}{3}\sqrt{1+x^6} + \frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^6}-1}{\sqrt{1+x^6}+1}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

4)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\, dx &= \int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{(1+x)-(1-x)}\, dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\, dx - \int \frac{\sqrt{1-x}}{x}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int \frac{u}{u^2-1} 2u\, du + \int \frac{v}{1-v^2} 2v\, dv\right) \text{ (en posant } u = \sqrt{1+x} \text{ et } v = \sqrt{1-x}) \\
&= \int \left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)\, du + \int \left(-1+\frac{1}{1-v^2}\right)\, dv \\
&= u - v + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| + \ln\left|\frac{1+v}{1-v}\right|\right) + C \\
&= \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right) + C.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\, dx = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}\right|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

5) On pose $u = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ et donc $x = \frac{u^2+1}{u^2-1}$, puis $dx = \frac{-4u}{(u^2-1)^2}\, du$. Sur $]1,+\infty[$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx &= -2\int u\frac{2u}{(u^2-1)^2}\, du = 2\frac{u}{u^2-1} - 2\int \frac{1}{u^2-1}\, du \\
&= \frac{2u}{u^2-1} + \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| + C
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx = \sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\right| + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

6) On note ε le signe de x.

$\sqrt{x^4-x^2+1} = \varepsilon x\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-1} = \varepsilon x\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}$ et donc

$$\frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}} = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}}\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}}\left(x-\frac{1}{x}\right)'.$$

On pose donc $u = x - \frac{1}{x}$ et on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx &= \varepsilon\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \varepsilon\,\text{argsh}\left(x-\frac{1}{x}\right)+C\\ &= \varepsilon\ln\left(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x}\right)+C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4-x^2+1}}\,dx = \varepsilon\ln\left(\frac{x^2-1+\varepsilon\sqrt{x^4-x^2+1}}{x}\right)+C,\ C\in\mathbb{R},\ \varepsilon=\text{sgn}(x).}$$

7) Sur $]0,1]$, on pose déjà $u=\sqrt{x}$ et donc, $x=u^2$, $dx=2u\,du$.

$$\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx = \int\sqrt{\frac{1-u}{u}}2u\,du = 2\int\sqrt{u(1-u)}\,du = 2\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}\,du.$$

Puis, on pose $u-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sin v$ et donc $du=\dfrac{1}{2}\cos v\,dv$.
On note que $x\in]0,1]\Rightarrow u\in]0,1]\Rightarrow v=\text{Arcsin}(2u-1)\in]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]\Rightarrow \cos v\geq 0$.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx &= 2\int\sqrt{\frac{1}{4}(1-\sin^2 v)}\times\frac{1}{2}\cos v\,dv = \frac{1}{2}\int\cos^2 v\,dv = \frac{1}{4}\int(1+\cos(2v))\,dv\\ &= \frac{1}{4}(v+\frac{1}{2}\sin(2v))+C = \frac{1}{4}(v+\sin v\cos v)+C\\ &= \frac{1}{4}\left(\text{Arcsin}(2\sqrt{x}-1)+(2\sqrt{x}-1)\sqrt{1-(2\sqrt{x}-1)^2}\right)+C\\ &= \frac{1}{4}\left(\text{Arcsin}(2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x}\right)+C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}\,dx = \frac{1}{4}\left(\text{Arcsin}(2\sqrt{x}-1)+2(2\sqrt{x}-1)\sqrt{\sqrt{x}-x}\right)+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

8) On pose $x=\text{sh}\,t$ puis $u=e^t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \int\frac{1}{1+\text{ch}\,t}\text{ch}\,t\,dt = \int\frac{\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)}\frac{du}{u} = \int\frac{u^2+1}{u(u^2+2u+1)}\,du = \int\left(\frac{1}{u}-\frac{2}{(u+1)^2}\right)\,du\\ &= \ln|u|+\frac{2}{u+1}+C.\end{aligned}$$

Maintenant, $t=\text{argsh}\,x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ et donc $u=x+\sqrt{x^2+1}$. Finalement,

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+1}}+C.$$

$$\boxed{\int\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{2}{x+1+\sqrt{x^2+1}}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

9) On pose $u=\dfrac{1}{x}$ puis $v=\sqrt[3]{u^3+1}=\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$ et donc $v^3=u^3+1$ puis $v^2\,dv=u^2\,du$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{u}\right)^3+1}}{\frac{1}{u^2}}\frac{-du}{u^2} = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u}\,du = -\int \frac{\sqrt[3]{u^3+1}}{u^3}u^2\,du$$
$$= -\int \frac{v}{v^3-1}v^2\,dv = \int \left(-1 - \frac{1}{(v-1)(v^2+v+1)}\right)\,dv$$
$$= \int \left(-1 - \frac{1}{3}\frac{1}{v-1} + \frac{1}{3}\frac{v+2}{v^2+v+1}\right)\,dv$$
$$= -v - \frac{1}{3}\ln|v-1| + \frac{1}{6}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}\,dv + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dv$$
$$= -v - \frac{1}{3}\ln|v-1| + \frac{1}{6}\ln(v^2+v+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x^2}\,dx = -v - \frac{1}{3}\ln|v-1| + \frac{1}{6}\ln(v^2+v+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) + C,\ C\in\mathbb{R},\ \text{où } v = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}.}$$

10) On pose $u = (x+1)^{1/6}$ de sorte que $\sqrt{x+1} = u^3$, $\sqrt[3]{x+1} = u^2$, $x = u^6 - 1$ puis $dx = 6u^5du$. On obtient

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = \int \frac{1}{u^3+u^2}\times 6u^5\,du = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du = 6\int \frac{u^3+u^2-u^2-u+u+1-1}{u+1}\,du$$
$$= 6\int \left(u^2-u+1-\frac{1}{u+1}\right)du = 2u^3-3u^2+6u-6\ln|u+1|+C$$
$$= 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + C.$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x+1}+1\right) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

n° 4 : 1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{\ln'(x)}{\ln(x)} = \ln|\ln x| + C.$

$$\boxed{\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \ln|\ln x| + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

2) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C.$

$$\boxed{\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arcsin}\,x + \sqrt{1-x^2} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

3) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

$$\boxed{\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

4) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \mathrm{Arccos}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arccos}\,x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,\mathrm{Arccos}\,x - \sqrt{1-x^2} + C.$

$$\boxed{\int \mathrm{Arccos}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arccos}\,x - \sqrt{1-x^2} + C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

On peut aussi utiliser 2) et l'identité $\forall x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arcsin}\, x$.

5) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \text{argsh}\, x \; dx = x\,\text{argsh}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\; dx = x\,\text{argsh}\, x - \sqrt{1+x^2} + C$.

$$\boxed{\int \text{argsh}\, x \; dx = x\,\text{argsh}\, x - \sqrt{x^2+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

6) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \text{argch}\, x \; dx = x\,\text{argch}\, x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\; dx = x\,\text{argch}\, x - \sqrt{x^2-1} + C$.

$$\boxed{\int \text{argch}\, x \; dx = x\,\text{argch}\, x - \sqrt{x^2-1} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

7) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \text{argth}\, x \; dx = x\,\text{argth}\, x - \int \frac{x}{1-x^2}\; dx = x\,\text{argth}\, x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$ $(I =]-1,1[)$.

$$\boxed{\int \text{argth}\, x \; dx = x\,\text{argth}\, x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

8) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \ln(1+x^2)\; dx = x\ln(1+x^2) - 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\; dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\text{Arctan}\, x + C$.

$$\boxed{\int \ln(1+x^2)\; dx = x\ln(1+x^2) - 2x + 2\,\text{Arctan}\, x + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

9) Deux intégration par parties fournissent

$$\begin{aligned}\int e^{\text{Arccos}\, x}\; dx &= xe^{\text{Arccos}\, x} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{Arccos}\, x}\; dx \\ &= xe^{\text{Arccos}\, x} - \sqrt{1-x^2}\,e^{\text{Arccos}\, x} + \int \sqrt{1-x^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} e^{\text{Arccos}\, x}\; dx\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\int e^{\text{Arccos}\, x}\; dx = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) e^{\text{Arccos}\, x} + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

10) Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}\int \cos x \ln(1+\cos x)\; dx &= \sin x \ln(1+\cos x) - \int \sin x \frac{-\sin x}{1+\cos x}\; dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x + 1}\; dx \\ &= \sin x \ln(1+\cos x) - \int (\cos x - 1)\; dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \sin x + x + C.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int \cos x \ln(1+\cos x)\; dx = \sin x \ln(1+\cos x) - \sin x + x + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

11) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int \frac{\text{Arctan}\, x}{\sqrt{x}}\; dx = 2\sqrt{x}\,\text{Arctan}\, x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\; dx$.

Dans la dernière intégrale, on pose $u = \sqrt{x}$ et donc $x = u^2$ puis, $dx = 2u\; du$. On obtient $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\; dx = \int \frac{2u^2}{u^4+1}\; du$. Mais,

$$\frac{2u^2}{u^4+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\left(u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}+\frac{1}{\left(u+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right).$$

Par suite,

$$\int\frac{2u^2}{u^4+1}\,du=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u-1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2}u+1))+C,$$

et donc,

$$\boxed{\int\frac{\mathrm{Arctan}\,x}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\,\mathrm{Arctan}\,x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x-\sqrt{2x}+1}{x+\sqrt{2x}+1}\right)-\sqrt{2}(\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}-1)+\mathrm{Arctan}(\sqrt{2x}+1))+C.}$$

12) $\dfrac{x}{(x+1)^2}e^x=\dfrac{1}{x+1}e^x-\dfrac{1}{(x+1)^2}e^x=\left(\dfrac{1}{x+1}e^x\right)'$ et donc

$$\boxed{\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx=\frac{e^x}{x+1}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

13) $\displaystyle\int\left(\frac{x}{e}\right)^x\ln x\,dx=\int e^{x\ln x-x}\,d(x\ln x-x)=e^{x\ln x-x}+C=\left(\frac{x}{e}\right)^x+C.$

$$\boxed{\int\left(\frac{x}{e}\right)^x\ln x\,dx=\left(\frac{x}{e}\right)^x+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

14) Une intégration par parties fournit $\displaystyle\int x^n\ln x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{1}{n+1}\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C.$

$$\boxed{\int x^n\ln x\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

15)

$$\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx=\mathrm{Re}\left(\int e^{(a+i\alpha)x}\,dx\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(a+i\alpha)x}}{a+i\alpha}\right)+C=\frac{e^{ax}}{a^2+\alpha^2}\mathrm{Re}((a-i\alpha)(\cos(\alpha x)+i\sin(\alpha x))+C$$
$$=\frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2}+C.$$

$$\boxed{\int e^{ax}\cos(\alpha x)\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos(\alpha x)+\alpha\sin(\alpha x))}{a^2+\alpha^2}+C,\ C\in\mathbb{R}.}$$

On peut aussi effectuer une double intégration par parties.

16) Deux intégrations par parties fournissent

$$\int\sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-x\cos(\ln x)-\int\sin(\ln x)\,dx$$

et donc

$$\boxed{\int \sin(\ln x)\ dx = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.}$$

17) En posant $u = x^n$ et donc $du = nx^{n-1}dx$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\ dx = \int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x^n}x^{n-1}\ dx = \frac{1}{n}\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\ du,$$

puis en posant $v = \sqrt{u+1}$ et donc $u = v^2 - 1$ et $du = 2vdv$, on obtient

$$\int \frac{\sqrt{u+1}}{u}\ du = \int \frac{v}{v^2-1}\ 2vdv = 2\int \frac{v^2-1+1}{v^2-1}\ dv = 2v + \ln\left|\frac{1-v}{1+v}\right| + C.$$

Finalement,

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x^n+1}}{x}\ dx = \frac{1}{n}\left(2\sqrt{x^n+1} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{x^n+1}}{1+\sqrt{x^n+1}}\right|\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

18) $\displaystyle\int x^2e^x \sin x\ dx = \mathrm{Im}\left(\int x^2e^{(1+i)x}\ dx\right)$. Or,

$$\begin{aligned}\int x^2e^{(1+i)x}\ dx &= x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\int xe^{(1+i)x}\ dx = x^2\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\left(x\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} - \int \frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\ dx\right)\\ &= x^2\frac{(1-i)e^{(1+i)x}}{2} + ixe^{(1+i)x} - i\frac{e^{(1+i)x}}{1+i} + C\\ &= e^x\left(\frac{1}{2}x^2(1-i)(\cos x + i\sin x) + ix(\cos x + i\sin x) - \frac{1}{2}(1+i)(\cos x + i\sin x)\right) + C.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\int x^2e^x \sin x\ dx = e^x\left(\frac{x^2}{2}(-\cos x + \sin x) - x\sin x - \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)\right) + C,\ C \in \mathbb{R}.}$$

n° 5 : 1) On pose $t = \dfrac{1}{x}$ et donc $x = \dfrac{1}{t}$ et $dx = -\dfrac{1}{t^2}\ dt$. On obtient

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx = \int_{a}^{1/a} \frac{\ln(1/t)}{\frac{1}{t^2}+1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_{1/a}^{a}\frac{\ln t}{t^2+1}\ dt = -I,$$

et donc, $I = 0$.

$$\boxed{\forall a > 0,\ \int_{1/a}^{a} \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx = 0.}$$

2) (p et q sont des entiers naturels) $\cos(px)\cos(qx) = \dfrac{1}{2}(\cos((p+q)x) + \cos((p-q)x))$ et donc,

• **Premier cas.** Si $p \neq q$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(p+q)x}{p+q} + \frac{\sin(p-q)x}{p-q}\right]_0^\pi = 0.$$

• **Deuxième cas.** Si $p = q \neq 0$,

$$\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 + \cos(2px))\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi dx = \frac{\pi}{2}.$$

• **Troisième cas.** Si $p = q = 0$. $\displaystyle\int_0^\pi \cos(px)\cos(qx)\ dx = \int_0^\pi\ dx = \pi$.

$$\boxed{\forall (p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \int_0^{\pi}\cos(px)\cos(qx)\ dx=\left\{\begin{array}{l}0 \text{ si } p\neq q\\ \pi/2 \text{ si } p=q\neq 0\\ \pi \text{ si } p=q=0\end{array}\right..}$$

La démarche est identique pour les deux autres et on trouve $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(px)\sin(qx)\ dx=0$ si $p\neq q$ et $\dfrac{\pi}{2}$ si $p=q\neq 0$ puis $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(px)\cos(qx)\ dx=0$ pour tout choix de p et q.

3) La courbe d'équation $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ ou encore $\left\{\begin{array}{l}x^2+y^2-(a+b)x+ab=0\\ y\geq 0\end{array}\right.$ est le demi-cercle de diamètre $[AB]$ où $A(a,0)$ et $B(b,0)$. Par suite, si $a\leq b$, $I=\dfrac{\pi R^2}{2}=\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$ et si $a>b$, $I=-\dfrac{\pi(b-a)^2}{8}$.

$$\boxed{\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \int_a^b\sqrt{(x-a)(b-x)}\ dx=\left\{\begin{array}{l}\pi(b-a)^2/8 \text{ si } a\leq b\\ -\pi(b-a)^2/8 \text{ si } a>b\end{array}\right..}$$

4) Sur chacun des intervalles $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ et $[1,2]$, la fonction à intégrer est affine. L'intégrale proposée est somme de quatre intégrales et chacune d'elles est l'aire d'un trapèze rectangle de base 1.

Ainsi, $I=\dfrac{6+4}{2}+\dfrac{4+4}{2}+\dfrac{4+6}{2}+\dfrac{6+10}{2}=21$.

$$\boxed{\int_{-2}^{2}(|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|)\ dx=21.}$$

5) On pose $u=\dfrac{1}{x}$. On obtient

$$\begin{aligned}I&=\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}x\ dx=\int_{2}^{1/2}(1+u^2)\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{-du}{u^2}=\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}u\right)\ du\\ &=\frac{\pi}{2}\left(\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}-2\right)\right)-I.\end{aligned}$$

Par suite, $I=\dfrac{3\pi}{2}-I$ et donc $I=\dfrac{3\pi}{4}$.

$$\boxed{\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{Arctan}x\ dx=\frac{3\pi}{4}.}$$

6) $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\ dx=\int_{-1}^{0}\sqrt{1+x(x-1)}\ dx+\int_0^1\sqrt{1+x(1-x)}\ dx=I_1+I_2$.

• **Calcul de** I_1**.** $1+x(x-1)=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ et on pose $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sh}t$ et donc $dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\ dt$.

$$\begin{aligned}I_1&=\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\operatorname{sh}^2t+1}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}t\ dt=\frac{3}{4}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}\operatorname{ch}^2t\ dt=\frac{3}{16}\int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\ln(\sqrt{3})}(e^{2t}+e^{-2t}+2)\ dt\\ &=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}(e^{-2\ln(\sqrt{3})}-e^{2\ln(2-\sqrt{3})})-\frac{1}{2}(e^{2\ln(\sqrt{3})}-e^{-2\ln(2-\sqrt{3})})+2(-\ln(\sqrt{3})-\ln(2-\sqrt{3}))\right)\\ &=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-(2-\sqrt{3})^2\right)-\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{(2-\sqrt{3})^2}\right)-2\ln(2\sqrt{3}-3)\right)\\ &=\frac{3}{16}\left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\left(-(2-\sqrt{3})^2+(2+\sqrt{3})^2\right)-2\ln(2\sqrt{3}-3)\right)\\ &=-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3).\end{aligned}$$

• **calcul de** I_2**.** $1+x(1-x) = -x^2+x+1 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$ et on pose $x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t$ et donc $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\ dt$.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}} \frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{1-\sin^2 t}\,\frac{\sqrt{5}}{2}\cos t\ dt = \frac{5}{4}\int_{-\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}} \cos^2 t\ dt = \frac{5}{8}\int_{-\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}} (1+\cos(2t))\ dt \\
&= \frac{5}{8}\left(2\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\left[\sin t\cos t\right]_0^{\text{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{5}}}\right) = \frac{5}{4}\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{5}{4}\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}} \\
&= \frac{5}{4}\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\sqrt{1+|x(1-x)|}\ dx = \frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{8}\ln(2\sqrt{3}-3)+\frac{5}{4}\,\text{Arcsin}\,\frac{1}{\sqrt{5}}.}$$

7) En posant $x = \pi - u$, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-u)\sin(\pi-u)}{1+\cos^2(\pi-u)}\ -du = \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{1+\cos^2 u}\ du - \int_0^{\pi}\frac{u\sin u}{1+\cos^2 u}\ du \\
&= -\pi\left[\text{Arctan}(\cos u)\right]_0^{\pi} - I = \frac{\pi^2}{2} - I,
\end{aligned}$$

et donc, $I = \frac{\pi^2}{4}$.

$$\boxed{\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx = \frac{\pi^2}{4}.}$$

8) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $I_n = \int_1^x \ln^n t\ dt$. Une intégration par parties fournit

$$I_{n+1} = \left[t\ln^{n+1} t\right]_1^x - (n+1)\int_1^x t\ln^n t\frac{1}{t}\ dt = x\ln^{n+1} x - (n+1)I_n.$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{I_{n+1}}{(n+1)!}+\frac{I_n}{n!} = \frac{x(\ln x)^{n+1}}{(n+1)!}$, et de plus, $I_1 = x\ln x - x + 1$.

Soit $n \geq 2$.

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{I_k}{k!}+\frac{I_{k+1}}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{I_k}{k!}+\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k-1}\frac{I_k}{k!} = -I_1-(-1)^n\frac{I_n}{n!},$$

Par suite,

$$I_n = (-1)^n n!\left(-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\frac{x(\ln x)^{k+1}}{(k+1)!} - x\ln x + x - 1\right) = (-1)^n n!\left(-1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x(\ln x)^k}{k!}\right),$$

ce qui reste vrai pour $n = 1$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0,+\infty[,\ \int_1^x (\ln x)^n\ dx = (-1)^n n!\left(-1+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x(\ln x)^k}{k!}\right).}$$

n° 6 : Si $c \neq d$, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si il existe A et B tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2(x-d)^2} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-d)^2} \ (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} A+B=1 \\ -2(Ad+Bc) = -(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} B = 1-A \\ A(d-c)+c = \frac{1}{2}(a+b) \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists (A,B) \in \mathbb{R}^2 / \left\{\begin{array}{l} A = \dfrac{a+b-2c}{2(d-c)} \\ B = \dfrac{2d-a-b}{2(d-c)} \\ Ad^2+Bc^2 = ab \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{a+b-2c}{2(d-c)}d^2 + \frac{2d-a-b}{2(d-c)}c^2 = ab$$

$$\Leftrightarrow d^2(a+b-2c) + c^2(2d-a-b) = 2ab(d-c) \Leftrightarrow (a+b)(d^2-c^2) - 2cd(d-c) = 2ab(d-c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(c+d) - 2cd = 2ab \Leftrightarrow (a+b)(c+d) = 2(ab+cd).$$

Si $c = d$, il existe trois nombres A, B et C tels que $(x-a)(x-b) = A(x-c)^2 + B(x-c) + C$ et donc tels que

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^4} = \frac{A}{(x-c)^2} + \frac{B}{(x-c)^3} + \frac{C}{(x-c)^4}.$$

Dans ce cas, les primitives sont rationnelles. Finalement, les primitives considérées sont rationnelles si et seulement si $c = d$ ou ($c \neq d$ et $(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$).

n° 7 : Notons D l'ensemble de définition de f.

Si $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$. f est donc impaire.
Si $x \in D$, $x + 2\pi \in D$ et $f(x+2\pi) = f(x)$. f est donc 2π-périodique.
On étudiera donc f sur $[0, \pi]$.

Soient $x \in [0, \pi]$ et $t \in [-1, 1]$. $t^2 - 2t\cos x + 1 = (t - \cos x)^2 + \sin^2 x \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\sin x = 0$ et $t - \cos x = 0$.
Ainsi, si $x \in]0, \pi[$, $\forall t \in]-1, 1[$, $t^2 - 2t\cos x + 1 > 0$. On en déduit que la fraction rationnelle $t \mapsto \dfrac{\sin x}{1 - 2t\cos x + t^2}$ est continue sur $[-1, 1]$, et donc que $f(x)$ existe.
Si $x = 0$, $\forall t \in [-1, 1[$, $\dfrac{\sin x}{t^2 - 2t\cos x + 1} = \dfrac{0}{(t-1)^2} = 0$. On peut prolonger cette fonction par continuité en 1 et consisérer que $f(0) = \displaystyle\int_{-1}^{1} 0 \, dt = 0$. De même, on peut considérer que $f(\pi) = 0$.
Ainsi, f est définie sur $[0, \pi]$ et donc, par parité et 2π-périodicité, sur $\mathbb{R}$.

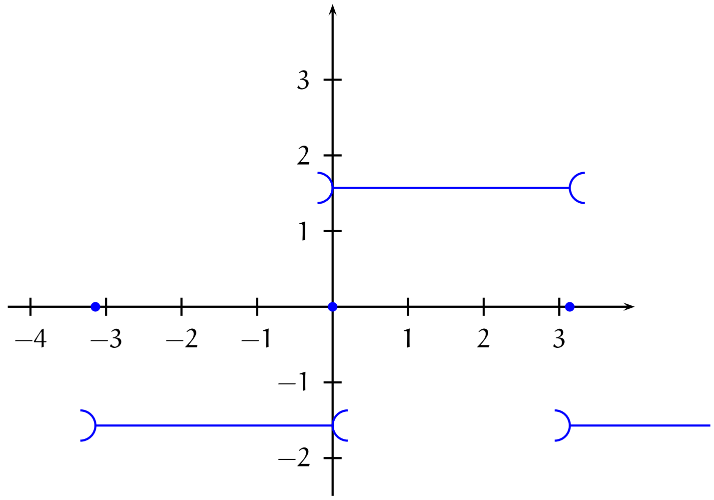
Soit $x \in]0, \pi[$. Calculons $f(x)$.

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\sin x}{(t-\cos x)^2 + \sin^2 x} \, dt = \left[\text{Arctan}\left(\frac{t - \cos x}{\sin x}\right)\right]_{-1}^{1} = \text{Arctan}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \text{Arctan}\,\frac{2\sin^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} + \text{Arctan}\,\frac{2\cos^2(x/2)}{2\sin(x/2)\cos(x/2)} = \text{Arctan}(\tan(x/2)) + \text{Arctan}(1/\tan(x/2))$$

$$= \frac{\pi}{2} \text{ (car } \tan(x/2) > 0 \text{ pour } x \in]0, \pi[).$$

Ce calcul achève l'étude de f. En voici le graphe :



n° 8 : Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \text{Max}(x,t) = \frac{1}{2}(x+t+|x-t|)$ est continue sur $[0,1]$ en vertu de théorèmes généraux. Par suite, $\int_0^1 \text{Max}(x,t)\,dt$ existe.

• Si $x \leq 0$, alors $\forall t \in [0,1]$, $x \leq t$ et donc $\text{Max}(x,t) = t$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$.

• Si $x \geq 1$, alors $\forall t \in [0,1]$, $t \leq x$ et donc $\text{Max}(x,t) = x$. Par suite, $f(x) = \int_0^1 x\,dt = x$.

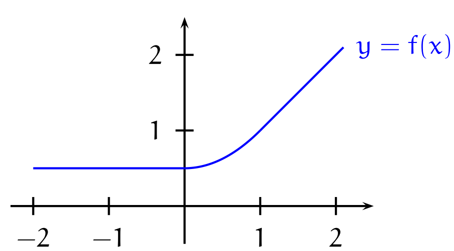
• Si $0 < x < 1$,

$$f(x) = \int_0^x x\,dt + \int_x^1 t\,dt = x^2 + \frac{1}{2}(1-x^2) = \frac{1}{2}(1+x^2).$$

En résumé,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) \text{ si } 0 < x < 1 \\ x \text{ si } x \geq 1 \end{cases}.}$$

f est déjà continue sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $f(0^+) = \frac{1}{2} = f(0)$ et $f(1^-) = 1 = f(1)$. f est ainsi continue à droite en 0 et continue à gauche en 1 et donc sur $\mathbb{R}$.
f est de classe C^1 sur $]-\infty,0]$, $[1,+\infty[$ et $]0,1[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0,\ x>0} x = 0$. f est donc continue sur $[0,1[$ de classe C^1 sur $]0,1[$ et f' a une limite réelle quand x tend vers 0. D'après un théorème classique d'analyse, f est de classe C^1 sur $[0,1[$ et en particulier, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$. Comme d'autre part, f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
L'étude en 1 montre que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 1$. Le graphe de f est le suivant :



n° 9 : **1)** $W_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^{n+1} x \, dx \\ &= \left[-\cos x \sin^{n+1} x\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos x)(n+1)(\cos x) \sin^n x \, dx = (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \sin^n x \, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x (1 - \sin^2 x) \, dx = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^n x - \sin^{n+2} x) \, dx = (n+1)(W_n - W_{n+2}),\end{aligned}$$

et donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.

$$\boxed{W_0 = \frac{\pi}{2},\ W_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 = \frac{(2p) \times (2p-1) \times (2p-2) \times \ldots \times 2 \times 1}{((2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 2)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\binom{2p}{p}}{2^{2p}} \times \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$ et aussi

$$\begin{aligned}W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1 = \frac{((2p) \times (2p-2) \times \ldots \times 2)^2}{(2p+1) \times (2p) \times (2p-1) \times \ldots \times 3 \times 2} \\ &= \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!},\end{aligned}$$

ce qui reste vrai pour $p = 0$.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \times \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}.}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout réel $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin t \leq 1$ et $\sin^n t \geq 0$. Par suite, $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin^{n+1} t \leq \sin^n t$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \leq W_n$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (W_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

La suite W est décroissante et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$.
Maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, W_n est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Après division par W_n, on obtient d'après 1)

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{W_n}{W_n} = 1.$$

Comme $\frac{n+1}{n+2}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.}$$

3) D'après 1), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ et donc $(n+1)W_{n+1}W_n = nW_nW_{n-1}$ ce qui montre que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Par suite, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(N+1)W_{n+1}W_n = 1 \times W_1 \times W_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}.}$$

D'après la question précédente, $W_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} W_n$ et donc $\dfrac{\pi}{2} = (n+1)W_{n+1}W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} nW_n^2$ ou encore $W_n^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ et enfin $W_n = \sqrt{W_n^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

$$\boxed{W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \text{ et en particulier } \lim_{n \to +\infty} W_n = 0.}$$

Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$0 \leq W_n = \int_0^{\alpha} \sin^n x \, dx + \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin^n x \, dx \leq \alpha \sin^n \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Soit alors $\varepsilon \in]0, \pi[$. On choisit $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'après ce qui précède, pour tout entier naturel n, on a

$$0 \leq W_n \leq \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque $0 \leq \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) \sin^n \left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

On a montré que $\forall \varepsilon \in]0, \pi[$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}/$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq W_n < \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = 0$.

4) D'après 3), on a $2nW_{2n}^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$. D'après 1), on a alors

$$2n \left(\frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}\right)^2 \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2},$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n \left(\frac{(2n-1) \times (2n-3) \times \ldots \times 3 \times 1}{(2n) \times (2n-2) \times \ldots \times 4 \times 2}\right)^2 = \frac{1}{\pi}.}$$

n° 10 : 1) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = [-\ln|\cos x|]_0^{\pi/4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x(1 + \tan^2 x) \, dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(I_{2k-2} + I_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k-2} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_{2k} - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_{2k} = I_0 - (-1)^n I_{2n}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; I_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right).}$$

De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k} = I_1 - (-1)^n I_{2n+1}$ et donc,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2}\left(\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right).}$$

2) Soient $\varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq I_n = \int_0^{\pi/4-\varepsilon/2} \tan^n x \, dx + \int_{\pi/4-\varepsilon/2}^{\pi/4} \tan^n x \, dx \leq \frac{\pi}{4} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, $0 < \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}) < 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$. Par suite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $0 \leq \tan^n\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq n_0$, on a alors $0 \leq I_n < \varepsilon$.

Ainsi, I_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On en déduit immédiatement que u_n tend vers $\ln 2$ et v_n tend vers $\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.}$$