Planche n° 29. Equations différentielles linéaires

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (IT)** Résoudre sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ proposé les équations différentielles suivantes :

1) $x\ln x y' + y = x,\ I =]1, +\infty[$ **2)** $x(xy' + y - x) = 1,\ I =]-\infty, 0[$
3) $2xy' + y = x^4,\ I =]-\infty, 0[$ **4)** $y' + 2y = x^2 - 3x,\ I = \mathbb{R}$
5) $y' + y = \dfrac{1}{1 + 2e^x},\ I = \mathbb{R}$ **6)** $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0,\ I =]0, \pi[$

n° 2 : (*I)** Résoudre l'équation différentielle $(1 - x^2)y' - 2xy = x^2$ sur chacun des intervalles I suivants : $I =]1, +\infty[$, $I =]-1, 1[$, $I =]-1, +\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

n° 3 : (***) Résoudre sur $]-\infty, 0[$, $]0, +\infty[$ puis $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x - 1)y = x^3$. (Le cas $I = \mathbb{R}$ ne peut être traité que si on connaît les développements limités).

n° 4 : (**) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$ **2)** $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ **3)** $y'' - 2y' + y = \operatorname{ch} x$
4) $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = e^x \sin x,\ k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

n° 5 : (**) On considère l'équation différentielle (E) : $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ (a, b, c réels, $a \neq 0$) pour $x \in]0, +\infty[$.

1) Soit y une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$. Vérifier que y est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) Effectuer le changement d'inconnue précédent dans l'équation différentielle (E) et vérifier que la résolution de (E) se ramène à la résolution d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants.
3) Résoudre sur $]0, +\infty[$, l'équation différentielle $x^2y'' - xy' + y = 0$.

n° 6 : (**) Soit a un réel non nul. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T \neq 0$. Montrer que l'équation différentielle $y' + ay = f$ admet une et une seule solution périodique sur $\mathbb{R}$, de période T.