Planche n° 29. Equations différentielles linéaires. Corrigé

n° 1 : Les équations différentielles à résoudre dans cet exercice sont toutes linéaires du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

1) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{1}{x\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (x\ln x)f'(x) + f(x) = x \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\ln x)f'(x) + \frac{1}{x}f(x) = 1\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\ln \times f)'(x) = 1 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (\ln x)f(x) = x + \lambda\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]1,+\infty[} = \left\{x \mapsto \frac{x+\lambda}{\ln x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{1}{x}y = 1 + \frac{1}{x^2}$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 1 + \frac{1}{x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ x(xf'(x) + f(x) - x) = 1 \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (xf)'(x) = x + \frac{1}{x}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ xf(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(-x) + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\ln(-x)+\lambda}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

3) Sur I, l'équation (E) est équivalente à l'équation $y' + \frac{1}{2x}y = 1 + \frac{x^3}{2}$. Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2x}$ et $x \mapsto \frac{x^3}{2}$ sont continues sur $I =]-\infty, 0[$ et on saitque les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ f'(x) + \frac{1}{2x}f(x) = \frac{x^3}{2}\\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ e^{\ln|x|/2}f'(x) + \frac{1}{2x}e^{\ln|x|/2}f(x) = \frac{x^3}{2}e^{\ln|x|/2} \Leftrightarrow \forall x \in I,\ (\sqrt{-x}f)'(x) = -\frac{1}{2}(-x)^{7/2}\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ \sqrt{-x}f(x) = \frac{1}{9}(-x)^{9/2} + \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{1}{9}x^4 + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto \frac{x^4}{9} + \frac{\lambda}{\sqrt{-x}},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

4) Les fonctions $x \mapsto 2$ et $x \mapsto x^2 - 3x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

1ère résolution. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = x^2 - 3x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \end{aligned}$$

Cherchons maintenant une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$.

1ère méthode. Deux intégrations par parties fournissent :

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x)e^{2x}\ dx &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{2}\int (2x - 3)e^{2x}\ dx \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 3x)e^{2x} - \frac{1}{4}(2x - 3)e^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\ dx \\ &= \frac{1}{4}(2x^2 - 8x + 3)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)e^{2x} + C \end{aligned}$$

2ème méthode. Cherchons une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

$$((ax^2 + bx + c)e^{2x})' = (2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b))e^{2x} = (2ax^2 + 2(a + b)x + b + 2c)e^{2x}.$$

Donc,

$$((ax^2 + bx + c)e^{2x})' = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2(a + b) = -3 \\ b + 2c = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right. .$$

Une primitive de la fonction $x \mapsto (x^2 - 3x)e^{2x}$ est la fonction $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) e^{2x}$.

Résolution de (E).

$$\begin{aligned} f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (e^{2x}f)'(x) = (x^2 - 3x)e^{2x} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ e^{2x}f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) e^{2x} + \lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

2ème résolution. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y' + 2y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) de la forme $f_0 : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_0'(x) + 2f_0(x) = (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + (2b + 2a)x + c + 2b,$$

et donc

$$\begin{aligned} f_0 \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 2ax^2 + (2b + 2a)x + c + 2b = x^2 - 3x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2(a + b) = -3 \\ b + 2c = 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}\right. . \end{aligned}$$

On retrouve le fait qu'une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ puis que la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2} - 2x + 1 + \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) Les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto \frac{1}{1+2e^x}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et on sait que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = \frac{1}{1+2e^x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f'(x) + e^x f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ e^x f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda\right) e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{1}{2}\ln(1+2e^x) + \lambda\right) e^{-x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

6) Les fonctions $x \mapsto -\frac{\cos x}{\sin x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{\sin x}$ sont continues sur $]0, \pi[$ et on sait que les solutions de (E) sur $]0, \pi[$ sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Or, la fonction $x \mapsto \sin x$ est une solution non nulle de (E_H) sur $]0, \pi[$ et la fonction $x \mapsto \cos x$ est une solution de (E) sur $]0, \pi[$. Donc

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,\pi[} = \{x \mapsto \lambda \sin x + \cos x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

n° 2 : L'équation différentielle à résoudre dans cet exercice est linéaire du premier ordre. On note (E) l'équation différentielle proposée et (E_H) l'équation homogène associée.

Soit I l'un des deux intervalles $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Les fonctions $x \mapsto \frac{-2x}{1-x^2}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{1-x^2}$ sont continues sur I et on sait que les solutions de (E) sur I sont de la forme $f_0 + \lambda f_1$ où f_0 est une solution particulière de (E) et f_1 est une solution particulière non nulle de (E_H).

Résolution de (E) sur I. Soit f une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow \forall x \in I,\ (1-x^2)f'(x) - 2xf(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in I,\ ((1-x^2)f)'(x) = x^2 \Leftrightarrow \exists \lambda' \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ (1-x^2)f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda' \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in I,\ f(x) = \frac{x^3+\lambda}{3(1-x^2)},
\end{aligned}$$

(en posant $\lambda = 3\lambda'$ de sorte que λ décrit $\mathbb{R}$ si et seulement si λ' décrit $\mathbb{R}$).

Si $I =]-1, +\infty[$, soit f une éventuelle solution de (E) sur I. Les restrictions de f à $]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont encore solution de (E) et donc de la forme précédente. Par suite, nécessairement, il existe deux constantes λ_1 etλ_2 telles que, pour $-1 < x < 1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}$ et pour $x > 1$, $f(x) = \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)}$. Enfin, l'équation impose $f(1) = -\frac{1}{2}$.
En résumé, une éventuelle solution de (E) sur $]-1, +\infty[$ est nécessairement de la forme :

$$\forall x > -1,\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} \frac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)} \text{ si } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{2} \text{ si } x = 1 \\ \frac{x^3+\lambda_2}{3(1-x^2)} \text{ si } x > 1 \end{array}\right. .$$

Réciproquement, f ainsi définie, est dérivable sur $]-1,1[$ et solution de (E) sur $]-1,1[$, dérivable sur $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur $]1,+\infty[$ et, si f est dérivable en 1, f vérifie encore (E) pour $x=1$. Donc, f est solution de (E) sur $]-1,+\infty[$ si et seulement si f est dérivable en 1.

Pour $-1<x<1$,

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\dfrac{x^3+\lambda_1}{3(1-x^2)}+\dfrac{1}{2}}{x-1}=\frac{2x^3+2\lambda_1+3(1-x^2)}{6(1-x^2)(x-1)}$$

Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, le dénominateur de la fraction tend vers 0 et le numérateur tend vers $2(1+\lambda_1)$. Donc, si $\lambda_1\neq-1$, f n'est pas dérivable à gauche en 1. De même, si λ_2 n'est pas -1, f n'est pas dérivable à droite en -1. Ainsi, si f est solution de (E) sur I, nécessairement $\lambda_1=\lambda_2=-1$. Dans ce cas, pour $x\in]-1,+\infty[\setminus\{1\}$,

$$f(x)=\frac{x^3-1}{3(1-x^2)}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{3(1-x)(1+x)}=-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)},$$

ce qui reste vrai pour $x=1$. Ainsi, si f est une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$, nécessairement pour $x>-1$, $f(x)=-\dfrac{x^2+x+1}{3(x+1)}$. Réciproquement, f ainsi définie est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 1. f est donc solution de (E) sur $]-1,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-1,+\infty[}=\left\{x\mapsto-\frac{x^2+x+1}{3(x+1)}\right\}.}$$

Si $I=\mathbb{R}$, soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. La restriction de f à $]-1,+\infty[$ est nécessairement la fonction précédente. Mais cette fonction tend vers $-\infty$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures. Donc f ne peut être continue sur $\mathbb{R}$ et (E) n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}}=\varnothing.}$$

n° 3 : Résolution de (E) sur $]0,+\infty[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,+\infty[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ |x|f'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3 \Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x)=x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ e^{x-\ln x}f'(x)+\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{x-\ln x}f(x)=e^{x-\ln x}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ \left(\frac{e^x}{x}f\right)'(x)=xe^x=((x-1)e^x)'\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ \frac{e^x}{x}f(x)=(x-1)e^x+\lambda \Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=x^2-x+\lambda xe^{-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]0,+\infty[}=\left\{x\mapsto x^2-x+\lambda xe^{-x},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution de (E) sur $]-\infty,0[$.

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,0[$.

$$\begin{aligned}
f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]-\infty,0[&\Leftrightarrow \forall x\in]0,+\infty[,\ -xf'(x)+(x-1)f(x)=x^3\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ f'(x)+\left(-1+\frac{1}{x}\right)f(x)=-x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ e^{-x+\ln|x|}f'(x)+\left(-1+\frac{1}{x}\right)e^{-x+\ln|x|}f(x)=-e^{-x+\ln|x|}x^2\\
&\Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (-xe^{-x}f)'(x)=x^3e^{-x} \Leftrightarrow \forall x\in]-\infty,0[,\ (xe^{-x}f)'(x)=-x^3e^{-x}\ (*)
\end{aligned}$$

Déterminons une primitive de la fonction $x \mapsto -x^3e^{-x}$ de la forme $(ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x}$.

$((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})' = (-(ax^3+bx^2+cx+d)+(3ax^2+2bx+c))e^{-x} = (-ax^3+(3a-b)x^2+(2b-c)x+c-d)e^{-x}$,

et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ((ax^3+bx^2+cx+d)e^{-x})' = -x^3e^{-x} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -a=-1 \\ 3a-b=0 \\ 2b-c=0 \\ c-d=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \\ c=6=d \end{array}\right. .$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ xe^{-x}f(x) = (x^3+3x^2+6x+6)e^{-x}+\lambda \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]-\infty,0[,\ f(x) = x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{]-\infty,0[} = \left\{x \mapsto x^2+3x+6+\frac{\lambda e^x+6}{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.}$$

Résolution sur $\mathbb{R}$. Soit f une éventuelle solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Nécessairement, il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2+3x+6+\dfrac{\lambda_1e^x+6}{x} \text{ si } x<0 \\ 0 \text{ si } x=0 \\ x \mapsto x^2-x+\lambda_2xe^{-x} \text{ si } x>0 \end{array}\right. .$$

Réciproquement, une telle fonction est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en 0.

Etude en 0 à droite. $f(x) \underset{x\to0,\ x>0}{=} -x+o(x)+\lambda_2(x+o(x)) = f(0)+(\lambda_2-1)x+o(x)$. Ainsi, pour tout choix de λ_2, f est continue et dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = \lambda_2-1$.

Etude en 0 à gauche. $f(x) \underset{x\to0,\ x<0}{=} 6+3x+\dfrac{\lambda_1+6+\lambda_1x+\lambda_1\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x} = \dfrac{\lambda_1+6}{x}+6+\lambda_1+\left(3+\dfrac{\lambda_1}{2}\right)x+o(x)$.

Si $\lambda_1 \neq -6$, f ne tend pas vers $f(0)=0$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et n'est donc pas continue en 0. Si $\lambda_1=-6$, $f(x) \underset{x\to0,\ x<0}{=} f(0)+0x+o(x)$. Dans ce cas, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=0$.

Enfin, f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en 0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$. D'après ce qui précède, ceci équivaut à $\lambda_1=-6$ et $\lambda_2=1$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une et une seule solution sur } \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto \left\{\begin{array}{l} x^2+3x+6-6\dfrac{e^x-1}{x} \text{ si } x<0 \\ x \mapsto x^2-x+xe^{-x} \text{ si } x \geq 0 \end{array}\right. .}$$

n° 4 : 1) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y''-2y'+2y=0$ est $r^2-2r+2=0$ dont les racines sont $1-i$ et $1+i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda\cos x+\mu\sin x)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. L'équation avec second membre s'écrit

$$y''-2y'+2y = \frac{x}{4}\left(e^{(1+i)x}+e^{(-1+i)x}+e^{(1-i)x}+e^{(-1-i)x}\right).$$

On applique alors le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y''-2y'+2y = xe^{(1+i)x}$.

$1+i$ est racine simple de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f\ :\ x \mapsto (ax^2+bx)e^{(1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}f''-2f'+2f &= (((1+i)^2(ax^2+bx)+2(1+i)(2ax+b)+2a) \\ &\quad -2((1+i)(ax^2+bx)+(2ax+b))+2(ax^2+bx))e^{(1+i)x} \\ &= (2(1+i)(2ax+b)+2a-2(2ax+b))e^{(1+i)x} = (2i(2ax+b)+2a)e^{(1+i)x} \\ &= (4iax+2a+2ib)e^{(1+i)x}\end{aligned}$$

puis,

$$f'' - 2f' + 2f = xe^{(1+i)x} \Leftrightarrow 4ia = 1 \text{ et } 2ib + 2a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{i}{4} \text{ et } b = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{(1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}(ix^2 + x)e^{(1-i)x}$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$.
$-1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation précédente admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax + b)e^{(-1+i)x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
f'' - 2f' + 2f &= (((-1+i)^2(ax+b) + 2(-1+i)a) - 2((-1+i)(ax+b) + a) + 2(ax+b))e^{(-1+i)x} \\
&= ((ax+b)(-2i - 2(-1+i) + 2) + 2(-1+i)a - 2a)e^{(-1+i)x} \\
&= (4(1-i)(ax+b) - 2(2-i)a)e^{(1+i)x} = (4(1-i)ax - 2(2-i)a + 4(1-i)b)e^{(1+i)x}
\end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned}
f'' - 2f' + 2f = xe^{(-1+i)x} &\Leftrightarrow 4(1-i)a = 1 \text{ et } 4(1-i)b - 2(2-i)a = 0 \\
&\Leftrightarrow a = \frac{1+i}{8} \text{ et } b = \frac{(2-i)(1+i)}{16(1-i)} = \frac{(3+i)(1+i)}{32} = \frac{1+2i}{16}.
\end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x}$. Par conjugaison, une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = xe^{(-1-i)x}$ est $x \mapsto \frac{1}{16}(2(1-i)x + 1 - 2i)e^{(-1-i)x}$.

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 2y = x\cos x \operatorname{ch} x$ est donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(2\mathrm{Re}\left(\frac{1}{4}(-ix^2 + x)e^{(1+i)x} + \frac{1}{16}(2(1+i)x + 1 + 2i)e^{(-1+i)x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{32}\mathrm{Re}\left(4(-ix^2 + x)(\cos x + i\sin x)e^x + (2x + 1 + 2(x+1)i)(\cos x + i\sin x)e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{32}\left(4(x\cos x + x^2\sin x)e^x + ((2x+1)\cos x - 2(x+1)\sin x)e^{-x}\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{1}{8}(x\cos x + x^2\sin x) + \lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^x + \frac{1}{32}((2x+1)\cos x - 2(x+1)\sin x)e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

2) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' + 6y' + 9y = 0$ est $r^2 + 6r + 9 = 0$ qui admet la racine double $r = -3$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{-3x}(\lambda x + \mu)$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

2 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
f'' + 6f' + 9f &= ((4(ax^2 + bx + c) + 4(2ax + b) + 2a) + 6(2(ax^2 + bx + c) + (2ax + b)) + 9(ax^2 + bx + c))e^{2x} \\
&= (25(ax^2 + bx + c) + 10(2ax + b) + 2a)e^{2x} = (25ax^2 + (20a + 25b)x + 2a + 10b + 25c)e^{2x}
\end{aligned}$$

puis,

$$f'' + 6f' + 9f = x^2e^{2x} \Leftrightarrow 25a = 1 \text{ et } 20a + 25b = 0 \text{ et } 2a + 10b + 25c = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{25} \text{ et } b = -\frac{4}{125} \text{ et } c = \frac{6}{625}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' + 6y' + 9y = x^2e^{2x}$ est $x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{625}(25x^2 - 20x + 6)e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{-3x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

3) L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$ est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet la racine double $r = 1$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^x(\lambda x + \mu)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Appliquons le principe de superposition des solutions.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$.
1 est racine double de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ax^2e^x$. D'après la formule de Leibniz :

$$f'' - 2f' + f = ((ax^2 + 2(2ax) + 2a) - 2(ax^2 + (2ax)) + ax^2)e^{2x} = 2ae^x$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^x \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x$ est $x \mapsto \frac{1}{2}x^2e^x$.

Recherche d'une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$.
-1 n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{-x}$.

$$f'' - 2f' + f = (a + 2a + a)e^{-x} = 4ae^{-x}$$

puis,

$$f'' - 2f' + f = e^{-x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{-x}$ est $x \mapsto \frac{1}{4}e^{-x}$.

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \left(\frac{x^2}{4} + \lambda x + \mu\right)e^x + \frac{1}{8}e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.}$$

4) Soit $k \in \mathbb{R}$. L'équation caractéristique de l'équation homogène $y'' - 2ky' + (1 + k^2)y = 0$ est $r^2 - 2kr + 1 + k^2 = 0$ dont le discriminant réduit vaut $-1 = i^2$. Cette équation admet donc pour racines $k + i$ et $k - i$. Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}(\lambda \cos x + \mu \sin x)$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Le second membre s'écrit $\mathrm{Im}(e^{(1+i)x})$. Résolvons donc l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$.

Si $k \neq 1$, $1 + i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique et donc l'équation proposée admet une solution particulière de la forme $f : x \mapsto ae^{(1+i)x}$. Or,

$$f'' - 2kf' + (1 + k^2)f = a((1 + i)^2 - 2k(1 + i) + 1 + k^2)e^{(1+i)x} = ((k - 1)^2 - 2(k - 1)i)ae^{(1+i)x}$$

et donc,

$$f'' - 2kf' + (1 + k^2)f = e^{(1+i)x} \Leftrightarrow a = \frac{1}{k - 1}\frac{1}{k - 1 - 2i} = \frac{k - 1 + 2i}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}.$$

Une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto \frac{k - 1 - 2i}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}e^{(1+i)x}$ et une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + y = e^x \sin x$ est

$$\frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}\mathrm{Im}\left((k - 1 - 2i)(\cos x + i \sin x)e^x\right) = \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2\cos x + (k - 1)\sin x)e^x.$$

$$\boxed{\mathscr{S}_{\mathbb{R}} = \left\{x \mapsto \frac{1}{(k - 1)(k^2 - 2k + 5)}(-2\cos x + (k - 1)\sin x)e^x + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{kx},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}\right\}.}$$

n° 5 : **1)** Supposons y deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction $t\mapsto e^t$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction $x\mapsto y(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc, puisque pour tout réel t, $z(t)=y(e^t)$, la fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x\mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et la fonction $t\mapsto z(t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc, puisque pour tout réel strictement positif x, $y(x)=z(\ln x)$, la fonction y est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

2) Pour t réel, posons donc $x=e^t$ ou encore $t=\ln x$, puis $z(t)=y(x)=y(e^t)$ ou encore $y(x)=z(\ln x)$. Alors

$$xy'(x)=x\times\frac{1}{x}z'(\ln x)=z'(t)\text{ puis }x^2y''(x)=x^2\left(\frac{1}{x}z'(\ln x)\right)'=x^2\left(-\frac{1}{x^2}z'(\ln x)+\frac{1}{x^2}z''(\ln x)\right)=-z'(t)+z''(t).$$

Par suite,

$$ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=a(z''(t)-z'(t))+bz'(t)+cz(t)=az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t).$$

Donc,

$$\forall x>0,\ ax^2y''(x)+bxy'(x)+cy(x)=0\Leftrightarrow\forall t\in\mathbb{R},\ az''(t)+(b-a)z'(t)+cz(t)=0.$$

3) On applique le 2) avec $a=1$, $b=-1$ et $c=1$. L'équation à résoudre sur $\mathbb{R}$ est alors $z''-2z'+z=0$. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t\mapsto(\lambda t+\mu)e^t$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions sur $]0,+\infty[$ de l'équation initiale sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto\lambda x\ln x+\mu x$, $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

n° 6 : On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation proposée sont les fonctions de la forme :

$$g\ :\ x\mapsto\lambda e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt,\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x+T)=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt$. Or,

$$\begin{aligned}\int_0^{x+T}e^{at}f(t)\,dt&=\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+\int_T^{x+T}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+\int_0^x e^{a(u+T)}f(u+T)\,du\\&=\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+e^{aT}\int_0^x e^{at}f(t)dt.\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}g(x+T)-g(x)&=\lambda e^{-a(x+T)}+e^{-a(x+T)}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt-\lambda e^{-ax}-e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt\\&=e^{-ax}\left(\lambda(e^{-aT}-1)+e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\right).\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}g\text{ est }T\text{-périodique}&\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R},\ e^{-ax}\left(\lambda(e^{-aT}-1)+e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\right)=0\\&\Leftrightarrow\lambda(1-e^{-aT})=e^{-aT}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\Leftrightarrow\lambda=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\int_0^T e^{at}f(t)\,dt\end{aligned}$$

($e^{-aT}\neq1$ car $a\neq0$ et $T\neq0$). D'où l'existence et l'unicité d'une solution T-périodique :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\frac{e^{-aT}}{1-e^{-aT}}\left(\int_0^T e^{at}f(t)\,dt e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x e^{at}f(t)\,dt\right).}$$