

Planche n° 30. Produit scalaire

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

n° 1 : (*)** Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(A) = \text{Tr}({}^tAA)$. Montrer que N est une norme vérifiant de plus $N(AB) \leq N(A)N(B)$ pour toutes matrices carrées A et B . N est-elle associée à un produit scalaire ?

n° 2 : (*)** Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel de dimension finie. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur E vérifiant l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in E^2$, $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$. On se propose de démontrer que $\| \cdot \|$ est associée à un produit scalaire.

On définit sur E^2 une application f par : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$.

1) Montrer que pour tout (x, y, z) de E^3 , on a : $f(x+z, y) + f(x-z, y) = 2f(x, y)$.

2) Montrer que pour tout (x, y) de E^2 , on a : $f(2x, y) = 2f(x, y)$.

3) Montrer que pour tout (x, y) de E^2 et tout rationnel r , on a : $f(rx, y) = rf(x, y)$.

On admettra que pour tout réel λ et tout (x, y) de E^2 on a : $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ (ce résultat provient de la continuité de f).

4) Montrer que pour tout (u, v, w) de E^3 , $f(u, w) + f(v, w) = f(u+v, w)$.

5) Montrer que f est bilinéaire.

6) Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme euclidienne.

n° 3 : (IT)** Dans \mathbb{R}^4 muni du produit scalaire usuel, on pose : $V_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $V_2 = (0, 3, 1, -1)$. On pose $F = \text{Vect}(V_1, V_2)$. Déterminer une base orthonormale de F et un système d'équations de F^\perp .

n° 4 : ()** Sur $\mathbb{R}[X]$, on pose $P|Q = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Existe-t-il A élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P|A = P(0)$?

n° 5 : (*)I** (Matrices et déterminants de GRAM)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p sur \mathbb{R} ($p \geq 2$).

Pour (x_1, \dots, x_n) donné dans E^n , on pose $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ (matrice de GRAM) et $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

1) Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

2) Montrer que (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.

3) On suppose que (x_1, \dots, x_n) est libre dans E (et donc $n \leq p$). On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d_F(x)$ la distance de x à F (c'est-à-dire

$$d_F(x) = \|x - p_F(x)\|. \text{ Montrer que } d_F(x) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}.$$

n° 6 : (I)** Soit a un vecteur non nul de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . On définit f de \mathbb{R}^3 dans lui-même par : $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Montrer que f est linéaire puis déterminer les vecteurs non nuls colinéaires à leur image par f .

n° 7 : (I)** Matrice de la projection orthogonale sur la droite d'équations $3x = 6y = 2z$ dans la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 ainsi que de la symétrie orthogonale par rapport à cette même droite.

De manière générale, matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire $u = (a, b, c)$ et de la projection orthogonale sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 .

n° 8 : ()** $E = \mathbb{R}^3$ euclidien orienté rapporté à une base orthonormée directe \mathcal{B} .

Etudier les endomorphismes de matrice A dans \mathcal{B} suivants :

$$1) A = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \quad 3) A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

n° 9 : (*)** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c réels.

Montrer que M est la matrice dans la base canonique orthonormée directe de \mathbb{R}^3 d'une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leq k \leq \frac{4}{27}$.

En posant $k = \frac{4 \sin^2 \varphi}{27}$, déterminer explicitement les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

n° 10 : ()** \mathcal{B} est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 donnée. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}, \mathbf{w} \wedge \mathbf{u}) = (\det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}))^2$ pour tous vecteurs \mathbf{u}, \mathbf{v} et \mathbf{w} .

n° 11 : (*)** (Inégalité de HADAMARD) Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , espace euclidien de dimension n . Montrer que : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$ en précisant les cas d'égalité.

n° 12 : ()** Montrer que $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} | \mathbf{w} \wedge \mathbf{s} = (\mathbf{u} | \mathbf{w})(\mathbf{v} | \mathbf{s}) - (\mathbf{u} | \mathbf{s})(\mathbf{v} | \mathbf{w})$ et $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{w} \wedge \mathbf{s}) = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{s}] \mathbf{w} - [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \mathbf{s}$.

n° 13 : (*)** Existence, unicité et calcul de a et b tels que $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 dx$ soit minimum (trouver deux démonstrations, une dans la mentalité du lycée et une dans la mentalité maths sup).

n° 14 : (*)** Soit (e_1, \dots, e_n) une base quelconque de E euclidien. Soient a_1, \dots, a_n n réels donnés. Montrer qu'il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x | e_i = a_i$.

n° 15 : (*)** Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Une famille de p vecteurs (x_1, \dots, x_p) est dite obtusangle si et seulement si pour tout (i, j) tel que $i \neq j, x_i | x_j < 0$. Montrer que l'on a nécessairement $p \leq n + 1$.

n° 16 : (*)** Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 1$. Montrer que $\sup\{|P(x)|, |x| \leq 1\} \leq 2$. Cas d'égalité ?

n° 17 : (*)** Soit r la rotation de \mathbb{R}^3 , euclidien orienté, dont l'axe est orienté par k unitaire et dont une mesure de l'angle est θ .

Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}^3, r(x) = (\cos \theta)x + (\sin \theta)(k \wedge x) + 2(x.k) \sin^2(\frac{\theta}{2})k$.

Application : écrire la matrice dans la base canonique (orthonormée directe de \mathbb{R}^3) de la rotation autour de $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

n° 18 : ()** Soit f continue strictement positive sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 f^n(t) dt$.

Montrer que la suite $u_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$ est définie et croissante.

n° 19 : (*)** Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $P | Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1) Montrer que $(E, |)$ est un espace euclidien.

2) Pour p entier naturel compris entre 0 et n , on pose $L_p = ((X^2 - 1)^p)^{(p)}$. Montrer que $\left(\frac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E .
Déterminer $\|L_p\|$.