Planche n° 30. Produit scalaire. Corrigé

n° 1 : Posons $\varphi : (A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$. Montrons que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1ère solution. • φ est symétrique. En effet, pour $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tAB)) = \mathrm{Tr}({}^tBA) = \varphi(B, A).$$

• φ est bilinéaire par linéarité de la trace et de la transposition.
• Si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, alors

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{i,j}\right) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 > 0$$

car au moins un des réels de cette somme est strictement positif. φ est donc définie, positive.

2ème solution. Posons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. On a

$$\mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}b_{i,j}\right) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

Ainsi, φ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier, φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

N n'est autre que la norme associée au produit scalaire φ (et en particulier, N est une norme).

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\begin{aligned}
N(AB)^2 &= \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right)^2\\
&\leq \sum_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} b_{l,j}^2\right) \text{ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)}\\
&= \sum_{i,j,k,l} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{i,k} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l,j} b_{l,j}^2\right) = N(A)^2N(B)^2,
\end{aligned}$$

et donc,

$$\boxed{\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ N(AB) \leq N(A)N(B).}$$

n° 2 : **1)** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
f(x + z, y) + f(x - z, y) &= \frac{1}{4}(\|x + z + y\|^2 + \|x - z + y\|^2 - \|x + z - y\|^2 - \|x - z - y\|^2)\\
&= \frac{1}{4}\left(2(\|x + y\|^2 + \|z\|^2) - 2(\|x - y\|^2 + \|z\|^2)\right) = 2f(x, y).
\end{aligned}$$

2) $2f(x, y) = f(x + x, y) + f(x - x, y) = f(2x, y) + f(0, y)$ mais $f(0, y) = (\|y\|^2 - \| - y\|^2) = 0$ (définition d'une norme).

3) • Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(nx, y) = nf(x, y)$.
C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geq 0$. Si l'égalité est vraie pour n et $n + 1$ alors d'après 1),

$$f((n + 2)x, y) + f(nx, y) = f((n + 1)x + x, y) + f((n + 1)x - x, y) = 2f((n + 1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,

$$f((n+2)x,y)=2f((n+1)x,y)-f(nx,y)=2(n+1)f(x,y)-nf(x,y)=(n+2)f(x,y).$$

Le résultat est démontré par récurrence.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $f(x,y)=f\left(n\times\dfrac{1}{n}.x,y\right)=nf\left(\dfrac{1}{n}x,y\right)$ et donc $f\left(\dfrac{1}{n}x,y\right)=\dfrac{1}{n}f(x,y)$.

• Soit alors $r=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $f(rx,y)=\dfrac{1}{q}f(px,y)=p\dfrac{1}{q}f(x,y)=rf(x,y)$ et donc, pour tout rationnel positif r, $f(rx,y)=rf(x,y)$.

Enfin, si $r\leq 0$, $f(rx,y)+f(-rx,y)=2f(0,y)=0$ (d'après 1)) et donc$=$ $f(-rx,y)=-f(-rx,y)=rf(x,y)$.

$$\forall(x,y)\in E^2,\ \forall r\in\mathbb{Q},\ f(rx,y)=rf(x,y).$$

4) On pose $x=\dfrac{1}{2}(u+v)$ et $y=\dfrac{1}{2}(u-v)$.

$$f(u,w)+f(v,w)=f(x+y,w)+f(x-y,w)=2f(x,w)=2f\left(\frac{1}{2}(u+v),w\right)=f(u+v,w).$$

5) f est symétrique (définition d'une norme) et linéaire par rapport à sa première variable (d'après 3) et 4)). Donc f est bilinéaire.

6) f est une forme bilinéaire symétrique. Pour $x\in E$, $f(x,x)=\dfrac{1}{4}(\|x+x\|^2+\|x-x\|^2)=\dfrac{1}{4}\|2x\|^2=\|x\|^2$ (définition d'une norme) ce qui montre tout à la fois que f est définie positive et donc un produit scalaire, et que $\|\ \|$ est la norme associée. $\|\ \|$ est donc une norme euclidienne.

n° 3 : La famille (V_1,V_2) est clairement libre et donc une base de F. Son orthonormalisée (e_1,e_2) est une base orthonormée de F.

$\|V_1\|=\sqrt{1+4+1+1}=\sqrt{7}$ et $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{7}}V_1=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$.

$(V_2|e_1)=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(0+6-1-1)=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ puis $V_2-(V_2|e_1)e_1=(0,3,1,-1)-\dfrac{4}{7}(1,2,-1,1)=\dfrac{1}{7}(-4,13,11,-11)$ puis $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.

Une base orthonormée de F est (e_1,e_2) où $e_1=\dfrac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)$ et $e_2=\dfrac{1}{\sqrt{427}}(-4,13,11,-11)$.

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$(x,y,z,t)\in F^{\perp}\Leftrightarrow(x,y,z,t)\in(V_1,V_2)^{\perp}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t=0\\3y+z-t=0\end{array}\right..$$

n° 4 : Soit A un éventuel polynôme solution c'est à dire tel que $\forall P\in\mathbb{R}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,dt=P(0)$.

$P=1$ fournit $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,dt=1$ et donc nécessairement $A\neq 0$. $P=XA$ fournit $\displaystyle\int_0^1 tA^2(t)\,dt=P(0)=0$.

Mais alors, $\forall t\in[0,1]$, $tA^2(t)=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) puis $A=0$ (polynôme ayant une infinité de racines deux à deux distinctes). A n'existe pas.

n° 5 : 1) Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et $M=\text{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,...,x_n)$ (M est une matrice de format (p,n)).

Puisque $\mathscr{B}$ est orthonormée, le produit scalaire usuel des colonnes C_i et C_j est encore $x_i|x_j$.

Donc, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, ${}^tC_iC_j=x_i|x_j$ ou encore

$$\boxed{G={}^tMM.}$$

Il s'agit alors de montrer que $\text{rg}(M)=\text{rg}({}^tMM)$. Ceci provient du fait que M et ${}^tMM$ ont même noyau. En effet, pour $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$X\in\text{Ker}M\Rightarrow MX=0\Rightarrow{}^tM\times MX=0\Rightarrow({}^tMM)X=0\Rightarrow X\in\text{Ker}({}^tMM)$$

et

$$X \in \mathrm{Ker}({}^t MM) \Rightarrow {}^t MMX = 0 \Rightarrow {}^t X {}^t MMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|^2 = 0 \Rightarrow MX = 0$$
$$\Rightarrow X \in \mathrm{Ker} M.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}({}^t MM) = \mathrm{Ker}(G(x_1, \ldots, x_n))$. Mais alors, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(G(x_1, \ldots, x_n))$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(G(x_1, \ldots, x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n).}$$

2) Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée, $\mathrm{rg}(G) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n) < n$, et donc, puisque G est une matrice carrée de format n, $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G) = 0$.
Si la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre, $(x_1, ..., x_n)$ engendre un espace F de dimension n. Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormée de F et M la matrice de la famille $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathscr{B}$. D'après 1), on a $G = {}^t MM$ et d'autre part, M est une matrice carrée. Par suite,

$$\gamma(x_1, ..., x_n) = \det({}^t MM) = \det({}^t M)\det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

3) On écrit $x = x - p_F(x) + p_F(x)$. La première colonne de $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \|x\|^2 \\ x|x_1 \\ x|x_2 \\ \vdots \\ x|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_1 \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ x - p_F(x) + p_F(x)|x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0|x_1 \\ 0|x_2 \\ \vdots \\ 0|x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \|p_F(x)\|^2 \\ p_F(x)|x_1 \\ p_F(x)|x_2 \\ \vdots \\ p_F(x)|x_n \end{pmatrix}.$$

(en 1ère ligne, c'est le théorème de PYTHAGORE et dans les suivantes, $x - p_F(x) \in F^\perp$). Par linéarité par rapport à la première colonne, $\gamma(x, x_1, ..., x_n)$ est somme de deux déterminants. Le deuxième est $\gamma(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ et est nul car la famille $(p_F(x), x_1, ..., x_n)$ est liée. On développe le premier suivant sa première colonne et on obtient :

$$\gamma(x, x_1, ..., x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, ..., x_n),$$

ce qui fournit la formule désirée.

$$\boxed{\forall x \in E,\ d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \ldots, x_n)}{\gamma(x_1, \ldots, x_n)}}.}$$

n° 6 : Je vous laisse vérifier la linéarité.
Si x est colinéaire à a, $f(x) = 0$ et les vecteurs de $\mathrm{Vect}(a) \setminus \{0\}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires à leur image.
Si x n'est pas colinéaire à a, $a \wedge x$ est un vecteur non nul orthogonal à a et il en est de même de $f(x) = a \wedge (a \wedge x)$. Donc, si x est colinéaire à $f(x)$, x est nécessairement orthogonal à a.
Réciproquement, si x est un vecteur non nul orthogonal à a, $f(x) = (a.x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x$ et x est colinéaire à $f(x)$.
Les vecteurs non nuls colinéaires à leur image sont les vecteurs non nuls de $\mathrm{Vect}(a)$ et de $a^\perp$.

n° 7 : Un vecteur engendrant D est $\overrightarrow{u} = (2, 1, 3)$. Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$p((x, y, z)) = \frac{(x, y, z)|(2, 1, 3)}{\|(2, 1, 3)\|^2}(2, 1, 3) = \frac{2x + y + 3z}{14}(2, 1, 3).$$

On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} p = P = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, puis $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}} s = 2P - I = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Plus généralement, la matrice de la projection orthogonale sur le vecteur unitaire (a, b, c) dans la base canonique orthonormée est $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ et la matrice de la projection orthogonale sur le plan $ax + by + cz = 0$ dans la base canonique orthonormée est $I - P = \begin{pmatrix} 1 - a^2 & -ab & -ac \\ -ab & 1 - b^2 & -bc \\ -ac & -bc & 1 - c^2 \end{pmatrix}$.

n° 8 : 1) $\|C_1\| = \|C_2\| = \dfrac{1}{3}\sqrt{4+4+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \dfrac{1}{9}(-2+4-2) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation (distincte de l'identité).

Axe de f. Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x-y-2z=0 \\ -2x-5y-z=0 \\ -x+2y-5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-2x-5y \\ 3x+9y=0 \\ 9x+27y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3y \\ z=y \end{array}\right. .$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (-3,1,1)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$.

Angle de f. Le vecteur $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à l'axe. Donc,

$$\cos\theta = \overrightarrow{v}.f(\overrightarrow{v}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1).\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{3}(-1,1,-4) = -\frac{1}{6}\times 5 = -\frac{5}{6},$$

et donc, $\theta = \pm\,\text{Arccos}(-\dfrac{5}{6})\ (2\pi)$. (Si on sait que $\text{Tr}(A) = 2\cos\theta + 1$, c'est plus court : $2\cos\theta + 1 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3}$ fournit $\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$).

Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}] = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3} < 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } -\text{Arccos}(-\frac{5}{6}) \text{ autour de } u = (-3,1,1).}$$

2) $\|C_1\| = \|C_2\| = \dfrac{1}{4}\sqrt{9+1+6} = 1$ et $C_1|C_2 = \dfrac{1}{16}(3+3-6) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4\sqrt{6} \\ -4\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} \\ 2 \end{pmatrix} = C_3.$$

Donc, $A \in O_3^+(\mathbb{R})$ et f est une rotation.

Axe de f. Soit $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x+y+\sqrt{6}z=0 \\ x-y-\sqrt{6}z=0 \\ -\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x-y=\sqrt{6}z=\frac{2}{\sqrt{6}}z \Leftrightarrow x=y \text{ et } z=0.$$

L'axe D de f est $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$.

Angle de f. $\overrightarrow{k} = [0,0,1)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Par suite,

$$\cos\theta = \overrightarrow{k}.f(\overrightarrow{k}) = (0,0,1).\frac{1}{4}(\sqrt{6},-\sqrt{6},2) = \frac{1}{2},$$

et donc $\cos\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$. Le signe de $\sin\theta$ est le signe de $\left[\overrightarrow{i}, f(\overrightarrow{i}), \overrightarrow{u}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 3/4 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6}/4 & 0 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} > 0$. Donc,

$$\boxed{f \text{ est la rotation d'angle } \frac{\pi}{3} \text{ autour de } \overrightarrow{u} = (1,1,0).}$$

3) $\|C_1\| = \|C_2\| = \dfrac{1}{9}\sqrt{64+16+1} = 1$ et $C_1|C_2 = \dfrac{1}{81}(8-16+8) = 0$. Enfin,

$$C_1 \wedge C_2 = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} -36 \\ -63 \\ 36 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -C_3.$$

Donc, $A \in O_3^-(\mathbb{R})$. A n'est pas symétrique, et donc f n'est pas une réflexion. f est donc la composée commutative $s \circ r$ d'une rotation d'angle θ autour d'un certain vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ et de la réflexion de plan $\overrightarrow{u}^{\perp}$ où $\overrightarrow{u}$ et θ sont à déterminer.

Axe de $\mathbf{r}$**.** L'axe de r est $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ (car $f \neq -\mathrm{Id}_E$).

$$AX = -X \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 17x + y + 4z = 0 \\ -4x + 13y + 7z = 0 \\ x + 8y + 5z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -17x - 4z \\ -225x - 45z = 0 \\ -135x - 27z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = -5x \\ y = 3x \end{array}\right.$$

$\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}) = D$ où $u = (1, 3, -5)$. D est dorénavant orienté par $\overrightarrow{u}$.
s est la réflexion par rapport au plan $P = u^{\perp}$ dont une équation est $x + 3y - 5z = 0$.
On écrit alors la matrice S de s dans la base de départ. On calcule $S^{-1}A = SA$ qui est la matrice de r et on termine comme en 1) et 2).

n° 9 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} f \text{ est une rotation} &\Leftrightarrow M \in O_3^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \|C_1\| = \|C_2\| = \|C_3\| = 1 \text{ et } C_1|C_2 = C_1|C_3 = C_2|C_3 = 0 \text{ et } \det M = 1 \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ et } ab + bc + ca = 0 \text{ et } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1. \end{aligned}$$

Posons $\sigma_1 = a + b + c$, $\sigma_2 = ab + bc + ca$ et $\sigma_3 = abc$. On a $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab + ac + bc) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. Ensuite,

$$\sigma_1^3 = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + ba^2 + a^2c + ca^2 + b^2c + c^2b) + 6abc,$$

et

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) = a^3 + b^3 + c^3 + (a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b).$$

Donc,

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = -2(a^3 + b^3 + c^3) + 6\sigma_3$$

et finalement, $a^3 + b^3 + c^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

$$\begin{aligned} M \in O_3^+(\mathbb{R}) &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 \text{ et } \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \sigma_2 = 0 \text{ et } \sigma_1 = 1 \\ &\Leftrightarrow a,\ b \text{ et } c \text{ sont les solutions réelles d'une équation du type } x^3 - x^2 + k = 0 \text{ (où } k = -\sigma_3). \end{aligned}$$

Posons $P(x) = x^3 - x^2 + k$ et donc $P'(x) = 3x^2 - 2x = x(2x - 3)$.
Sur $]-\infty, 0]$, P est strictement croissante, strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$. P admet donc au plus une racine dans chacun de ces trois intervalles.

1er cas. Si $P(0) = k > 0$ et $P\left(\dfrac{2}{3}\right) = k - \dfrac{4}{27} < 0$ ou ce qui revient au même, $0 < k < \dfrac{4}{27}$, P admet trois racines réelles deux à deux distinctes (P étant d'autre part continue sur $\mathbb{R}$), nécessairement toutes simples.

2ème cas. Si $k \in \left\{0, \dfrac{4}{27}\right\}$, P et P' ont une racine réelle commune (à savoir 0 ou $\dfrac{4}{27}$) et P admet une racine réelle d'ordre au moins 2. La troisième racine est alors nécessairement réelle.

3ème cas. Si $k < 0$ ou $k > \dfrac{4}{27}$, P admet une racine réelle exactement. Celle-ci est nécessairement simple au vu du 2ème cas et donc P admet deux autres racines non réelles.

En résumé, P a toutes ses racines réelles si et seulement si $0 \leq k \leq \dfrac{4}{27}$ et donc, f est une rotation si et seulement si a, b et c sont les solutions d'une équation du type $x^3 - x^2 + k = 0$ où $0 \leq k \leq \dfrac{4}{27}$.

n° 10 :

$$\begin{aligned}[u\wedge v, v\wedge w, w\wedge u] &= ((u\wedge v)\wedge(v\wedge w))|(w\wedge u) = (((u\wedge v)|w)v - ((u\wedge v)|v)w)|(w\wedge u)\\ &= (((u\wedge v)|w)v)|(w\wedge u) = ((u\wedge v)w)\times(v|(w\wedge u)) = [u,v,w][w,u,v]\\ &= [u,v,w]^2.\end{aligned}$$

n° 11 : Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille liée, l'inégalité est claire et de plus, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs est nuls.

Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre et donc une base de E, considérons $\mathscr{B}' = (e_1, ..., e_n)$ son orthonormalisée de SCHMIDT. On a

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n}\times\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n}|,$$

car $\det_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ est le déterminant d'une d'une base orthonormée dans une autre et vaut donc 1 ou -1.
Maintenant, la matrice de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure et son déterminant est le produit des coefficients diagonaux à savoir les nombres $x_i|e_i$ (puisque $\mathscr{B}'$ est orthonormée). Donc

$$|\det_{\mathscr{B}}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = |\det_{\mathscr{B}'}(x_i)_{1\leq i\leq n}| = \left|\prod_{i=1}^{n}(x_i|e_i)\right| \leq \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|\times\|e_i\| = \prod_{i=1}^{n}\|x_i\|,$$

d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. De plus, on a l'égalité si et seulement si, pour tout i, $|x_i|e_i| = \|x_i\|\times\|e_i\|$ ou encore si et seulement si, pour tout i, x_i est colinéaire à e_i ou enfin si et seulement si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est orthogonale.

n° 12 : $(u\wedge v)|(w\wedge s) = [u,v,w\wedge s] = [w\wedge s,u,v] = ((w\wedge s)\wedge u)|v = ((u|w)s-(u|s)w)|v = (u|w)(v|s)-(u|s)(v|w)$.
De même, $(u\wedge v)\wedge(w\wedge s) = ((u\wedge v)|s)w - ((u\wedge v)|w)s = [u,v,s]w - [u,v,w]s$.

n° 13 : **1ère solution.**

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx &= \frac{1}{9}+\frac{1}{3}a^2+b^2-\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b+ab = \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2-\frac{1}{12}(3b-1)^2+b^2-\frac{2}{5}b+\frac{1}{9}\\ &= \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{10}b+\frac{1}{36} = \frac{1}{3}\left(a+\frac{1}{2}(3b-1)\right)^2+\frac{1}{4}\left(b+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{4}{225}\geq\frac{4}{225},\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si $a+\frac{1}{2}(3b-1) = b+\frac{1}{5} = 0$ ou encore $b = -\frac{1}{5}$ et $a = \frac{4}{5}$.

$$\boxed{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx \text{ est minimum pour } a = \frac{4}{5} \text{ et } b = -\frac{1}{5} \text{ et ce minimum vaut } \frac{4}{225}.}$$

2ème solution. $(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_4[X]$ et $\int_0^1 (x^4-ax-b)^2dx$ est, pour ce produit scalaire, le carré de la distance du polynôme X^4 au polynôme de degré inférieur ou égal à 1, $aX+b$. On doit calculer $\text{Inf}\left\{\int_0^1 (x^4-ax-b)^2\,dx,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ qui est le carré de la distance de X^4 à $F = \mathbb{R}_1[X]$. On sait que cette borne inférieure est un minimum, atteint une et une seule fois quand $aX+b$ est la projection orthogonale de X^4 sur F.

Trouvons une base orthonormale de F. L'orthonormalisée (P_0,P_1) de $(1,X)$ convient.
$||1||^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ et $P_0 = 1$. Puis $X-(X|P_0)P_0 = X-\int_0^1 t\,dt = X-\frac{1}{2}$, et comme $||X-(X|P_0)P_0||^2 = \int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\,dt = \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $P_1 = 2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2X-1)$.

La projection orthogonale de X^4 sur F est alors $(X^4|P_0)P_0+(X^4|P_1)P_1$ avec $(X^4|P_0) = \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5}$ et $(X^4|P_1) = \sqrt{3}\int_0^1 t^4(2t-1)\,dt = \sqrt{3}(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}) = \frac{2\sqrt{3}}{15}$. Donc, la projection orthogonale de X^4 sur F est $\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\sqrt{3}(2X-1) = \frac{1}{5}(4X-1)$.

Le minimum cherché est alors $\int_0^1\left(t^4-\frac{1}{5}(4t-1)\right)^2\,dt = ... = \frac{4}{225}$.

n° 14 : Soit $\varphi : \begin{array}{lcl} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x|e_1, ..., x|e_n) \end{array}$. φ est clairement linéaire et $\mathrm{Ker}\varphi$ est $(e_1, ..., e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$.
Comme E et $\mathbb{R}^n$ ont mêmes dimensions finies, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier, pour tout n-uplet $(a_1, ..., a_n)$ de réels, il existe un unique vecteur x tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x|e_i = a_i$.

n° 15 : 1ère solution.
Montrons par récurrence que sur $n = \dim(E)$ que, si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est obtusangle, $p \leq n+1$.
• Pour $n = 1$, une famille obtusangle ne peut contenir au moins trois vecteurs car si elle contient les vecteurs x_1 et x_2 verifiant $x_1.x_2 < 0$, un vecteur x_3 quelconque est soit nul (auquel cas $x_3.x_1 = 0$), soit de même sens que x_1 (auquel cas $x_1.x_3 > 0$) soit de même sens que x_2 (auquel cas $x_2.x_3 > 0$). Donc $p \leq 2$.

• Soit $n \geq 1$. Suppososons que toute famille obtusangle d'un espace de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille obtusangle d'un espace E de dimension $n+1$. Si $p = 1$, il n'y a plus rien à dire. Supposons $p \geq 2$. x_p n'est pas nul et $H = x_p^\perp$ est un hyperplan de E et donc est de dimension n.
Soit, pour $1 \leq i \leq p-1$, $y_i = x_i - \dfrac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2}x_p$ le projeté orthogonal de x_i sur H.
Vérifions que la famille $(y_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est une famille obtusangle. Soit $(i, j) \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $i \neq j$.

$$y_i.y_j = x_i.x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} - \frac{(x_j|x_p)(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)(x_p|x_p)}{\|x_p\|^4} = x_i|x_j - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Mais alors, par hypothèse de récurrence, $p - 1 \leq 1 + \dim H = n + 1$ et donc $p \leq n + 2$.

Le résultat est démontré par récurrence.

2ème solution.
Montrons que si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est obtusangle, la famille $(x_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est libre. Supposons par l'absurde, qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p-1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i = 0$ $(*)$.
Quite à multiplier les deux membres de $(*)$ par -1, on peut supposer qu'il existe au moins un réel $\lambda_i > 0$. Soit I l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i > 0$ et J l'ensemble des indices i tels que $\lambda_i \leq 0$ (éventuellement J est vide). I et J sont disjoints.
(*) s'écrit $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = -\sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ (si J est vide, le second membre est nul). On a

$$0 \leq \left\|\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\|^2 = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right).\left(-\sum_{i\in J} \lambda_i x_i\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i(-\lambda_j)x_i.x_j \leq 0.$$

Donc, $\left\|\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right\|^2 = 0$ puis $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$.

Mais, en faisant le produit scalaire avec x_p, on obtient $\left(\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i\right).x_p = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i(x_i.x_p) < 0$ ce qui est une contradiction.
La famille $(x_i)_{1\leq i\leq p-1}$ est donc libre. Mais alors son cardinal $p-1$ est inférieur ou égal à la dimension n et donc $p \leq n+1$.

n° 16 : L'application $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_3[X]$. Déterminons une base orthonormée de E. Pour cela, déterminons (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) l'orthonormalisée de la base canonique $(P_0, P_1, P_2, P_3) = (1, X, X^2, X^3)$.

• $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 1^2\,dt = 2$ et on prend $\boxed{Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

• $P_1|Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^1 t\,dt = 0$ puis $P_1 - (P_1|Q_0)Q_0 = X$ puis $\|P_1 - (P_1|Q_0)Q_0\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,dt = \dfrac{2}{3}$ et $\boxed{Q_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}X}$.

• $P_2|Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-1}^1 t^2\,dt = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $P_2|Q_1 = 0$. Donc, $P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1 = X^2 - \dfrac{1}{3}$,

puis $\|P_2 - (P_2|Q_0)Q_0 - (P_2|Q_1)Q_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{45}$ et $\boxed{Q_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1)}$.

• $P_3|Q_0 = P_3|Q_2 = 0$ et $P_3|Q_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\displaystyle\int_{-1}^1 t^4\,dt = \dfrac{\sqrt{6}}{5}$ et $P_3 - (P_3|Q_0)Q_0 - (P_3|Q_1)Q_1 - (P_3|Q_2)Q_2 = X^3 - \dfrac{3}{5}X$, puis $\left\|X^3-\frac{3}{5}X\right\|^2=\int_{-1}^{1}\left(t^3-\frac{3}{5}t\right)^2\ dt=2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right)=2\frac{25-21}{175}=\frac{8}{175}$, et $\boxed{Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)}$.

Une base orthonormée de E est (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) où $Q_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $Q_1=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X$, $Q_2=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2-1)$ et $Q_3=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}(5X^3-3X)$.

Soit alors P un élément quelconque de $E=\mathbb{R}_3[X]$ tel que $\int_{-1}^{1}P^2(t)\ dt=1$. Posons $P=aQ_0+bQ_1+cQ_2+dQ_3$.

Puisque (Q_0,Q_1,Q_2,Q_3) est une base orthonormée de E, $\int_{-1}^{1}P^2(t)\ dt=\|P\|^2=a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Maintenant, pour $x\in[-1,1]$, en posant $M_i=\text{Max}\{|Q_i(x)|,\ x\in[-1,1]\}$, on a :

$$\begin{aligned}|P(x)|&\leq|a|\times|Q_0(x)|+|b|\times|Q_1(x)|+|c|\times|Q_2(x)|+|d|\times|Q_3(x)|\leq|a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}.\end{aligned}$$

Une étude brève montre alors que chaque $|P_i|$ atteint son maximum sur $[-1,1]$ en 1 (et -1) et donc

$$\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}}=2\sqrt{2}.$$

Ainsi, $\forall x\in[-1,1]$, $|P(x)|\leq2\sqrt{2}$ et donc $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leq2\sqrt{2}$.

Etudions les cas d'égalité. Soit $P\in\mathbb{R}_3[X]$ un polynôme éventuel tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}\leq2\sqrt{2}$.
Soit $x_0\in[-1,1]$ tel que $\text{Max}\{|P(x)|,\ x\in[-1,1]\}=|P(x_0)|$. Alors :

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}=|P(x_0)|&\leq|a|\times|Q_0(x_0)|+|b|\times|Q_1(x_0)|+|c|\times|Q_2(x_0)|+|d|\times|Q_3(x_0)|\leq|a|M_0+|b|M_1+|c|M_2+|d|M_3\\&\leq\sqrt{M_0^2+M_1^2+M_2^2+M_3^2}=2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Chacune de ces inégalités est donc une égalité. La dernière (Cauchy-Schwarz) est une égalité si et seulement si $(|a|,|b|,|c|,|d|)$ est colinéaire à $(1,\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7})$ ou encore si et seulement si P est de la forme $\lambda(\pm Q_0\pm\sqrt{3}Q_1\pm\sqrt{5}Q_2\pm\sqrt{7}Q_3)$ où $\lambda^2(1+3+5+7)=1$ et donc $\lambda=\pm\frac{1}{4}$, ce qui ne laisse plus que 16 polynômes possibles. L'avant-dernière inégalité est une égalité si et seulement si $x_0\in\{-1,1\}$ (clair). La première inégalité est une égalité si et seulement si

$$|aQ_0(1)+bQ_1(1)+cQ_2(1)+dQ_3(1)|=|a|Q_0(1)+|b|Q_1(1)+|c|Q_2(1)+|d|Q_3(1),$$

ce qui équivaut au fait que a, b, c et d aient même signe et P est l'un des deux polynômes

$$\begin{aligned}\pm\frac{1}{4}(Q_0+\sqrt{3}Q_1+\sqrt{5}Q_2+\sqrt{7}Q_3)&=\pm\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(1+3X+\frac{5}{2}(3X^2-1)+\frac{7}{2}(5X^3-3X)\right)\\&=\pm\frac{1}{8\sqrt{2}}(35X^3+15X2-15X-3)\end{aligned}$$

n° 17 : Si x est colinéaire à k, $r(x)=x$, et si $x\in k^{\perp}$, $r(x)=(\cos\theta)x+(\sin\theta)k\wedge x$.
Soit $x\in E$. On écrit $x=x_1+x_2$ où $x_1\in k^{\perp}$ et $x_2\in\text{Vect}(k)$. On a $x_2=(x.k)k$ (car k est unitaire) et $x_1=x-(x.k)k$. Par suite,

$$\begin{aligned}r(x)&=r(x_1)+r(x_2)=(\cos\theta)x_1+(\sin\theta)k\wedge x_1+x_2=(\cos\theta)(x-(x.k)k)+(\sin\theta)k\wedge x+(x.k)k\\&=(\cos\theta)x+(1-\cos\theta)(x.k)k+\sin\theta(k\wedge x)=(\cos\theta)x+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)(x.k)k+\sin\theta(k\wedge x)\end{aligned}$$

Application. Si $k=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_2)$ et $\theta=\frac{\pi}{3}$, pour tout vecteur x, on a :

$$r(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(x.k)k+\frac{\sqrt{3}}{2}(k\wedge x),$$

puis,

$$r(e_1)=\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{4}(e_1+e_2)-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(3e_1+e_2-\sqrt{6}e_3)$$
$$r(e_2)=\frac{1}{2}e_2+\frac{1}{4}(e_1+e_2)+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e_3=\frac{1}{4}(e_1+3e_2+\sqrt{6}e_3)$$
$$r(e_3)=\frac{1}{2}e_3+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}(-e_2+e_1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}e_1-\sqrt{6}e_2+2e_3).$$

$$\boxed{\text{La matrice cherchée est } \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&1&\sqrt{6}\\1&3&-\sqrt{6}\\-\sqrt{6}&\sqrt{6}&2\end{pmatrix}.}$$

n° 18 : L'application $(f,g)\mapsto\int_0^1 f(t)g(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$. D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\begin{aligned}I_nI_{n+2}&=\int_0^1 f^n(t)\ dt\int_0^1 f^{n+2}(t)\ dt=\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^n}\right)^2\ dt\int_0^1\left(\sqrt{(f(t))^{n+2}}\right)^2\ dt\\&\geq\left(\int_0^1\sqrt{(f(t))^n}\sqrt{(f(t))^{n+2}}\ dt\right)^2=\left(\int_0^1 f^{n+1}(t)\ dt\right)^2=I_{n+1}^2\end{aligned}$$

Maintenant, comme f est continue et strictement positive sur $[0,1]$, I_n est strictement positif pour tout naturel n. On en déduit que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\frac{I_{n+1}}{I_n}\leq\frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$ et donc que

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est définie et croissante.}}$$

n° 19 : **1)** La symétrie, la bilinéarité et la positivité sont claires. Soit alors $P\in\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}P|P=0&\Rightarrow\int_0^1 P^2(t)\ dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,1],\ P^2(t)=0\ \text{(fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow P=0\ \text{(polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $(P,Q)\mapsto\int_0^1 P(t)Q(t)\ dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Pour vérifier que la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n}$ est l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E, nous allons vérifier que

a) $\forall p\in[\![0,n]\!],\ \text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p)=\text{Vect}(1,X,...,X^p)$,

b) la famille $\left(\frac{L_p}{||L_p||}\right)_{0\leq p\leq n}$ est orthonormale,

c) $\forall p\in[\![0,n]\!],\ L_p|X^p>0$.

Pour a), on note que L_p est un polynôme de degré p (et de coefficient dominant $\frac{(2p)!}{p!}$). Par suite, $(L_0,L_1,...,L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, ou encore, $\forall p\in[\![0,n]\!],\ \text{Vect}(L_0,L_1,...,L_p)=\text{Vect}(1,X,...,X^p)$.

Soit $p\in[\![0,n]\!]$. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à p. Si $p\geq 1$, une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned}L_p|P&=\int_{-1}^1((t^2-1)^p)^{(p)}P(t)\ dt=\left[((t^2-1)^p)^{(p-1)}P(t)\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\ dt\\&=-\int_{-1}^1((t^2-1)^p)^{(p-1)}P'(t)\ dt.\end{aligned}$$

En effet, 1 et -1 sont racines d'ordre p de $(t^2-1)^p$ et donc d'ordre $p-k$ de $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p$ et en particulier, racines de chaque $((t^2-1)^p)^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq p-1$.

En réitérant, on obtient pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $L_p|P = (-1)^k \int_{-1}^{1} ((t^2-1)^p)^{(p-k)} P^{(k)}(t)\, dt$ et pour $k = p$, on obtient enfin $L_p|P = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p P^{(p)}(t)\, dt$, cette formule restant vraie pour $p = 0$.

Soient p et q deux entiers tels que $0 \leq q < p \leq n$. D'après ce qui précède, $L_p|L_q = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p L_q^{(p)}(t)\, dt = 0$ car $q = \deg(L_q) < q$. Ainsi, la famille $(L_p)_{0 \leq p \leq n}$ est donc une famille orthogonale de $n+1$ polynômes tous non nuls et est par suite est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. On en déduit que la famille $\left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, $L_p|X^p = (-1)^p \int_{-1}^{1} (t^2-1)^p (t^p)^{(p)}\, dt = p! \int_{-1}^{1} (1-t^2)^p\, dt > 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{L_p}{\|L_p\|}\right)_{0 \leq p \leq n} \text{ est l'orthonormalisée de la base canonique de } \mathbb{R}_n[X].}$$

Calculons $\|L_p\|$. On note que $L_p \in (L_0, ..., L_{p-1})^\perp = (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\|L_p\|^2 &= L_p|L_p = L_p|\mathrm{dom}(L_p)X^p \text{ (car } L_p \in (\mathbb{R}_{p-1}[X])^\perp\text{)} \\
&= \frac{(2p)!}{p!} L_p|X^p = \frac{(2p)!}{p!} p! \int_{-1}^{1} (1-t^2)^p\, dt = 2(2p)! \int_{0}^{1} (1-t^2)^p\, dt \\
&= 2(2p)! \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 u)^p(-\sin u)\, du = 2(2p)! \int_{0}^{\pi/2} \sin^{2p+1} u\, du \\
&= 2(2p)! W_{2p+1} \text{ (intégrales de } \textsc{Wallis}\text{)} \\
&= 2(2p)! \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \text{ (à revoir)} \\
&= \frac{2}{2p+1} 2^{2p}(p!)^2.
\end{aligned}$$

Donc, $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\|L_p\| = \sqrt{\dfrac{2}{2p+1}} 2^p p!$. On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\dfrac{2p+1}{2}} \dfrac{1}{2^p p!} ((X^2-1)^p)^{(p)}\right)_{0 \leq p \leq n}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire considéré).